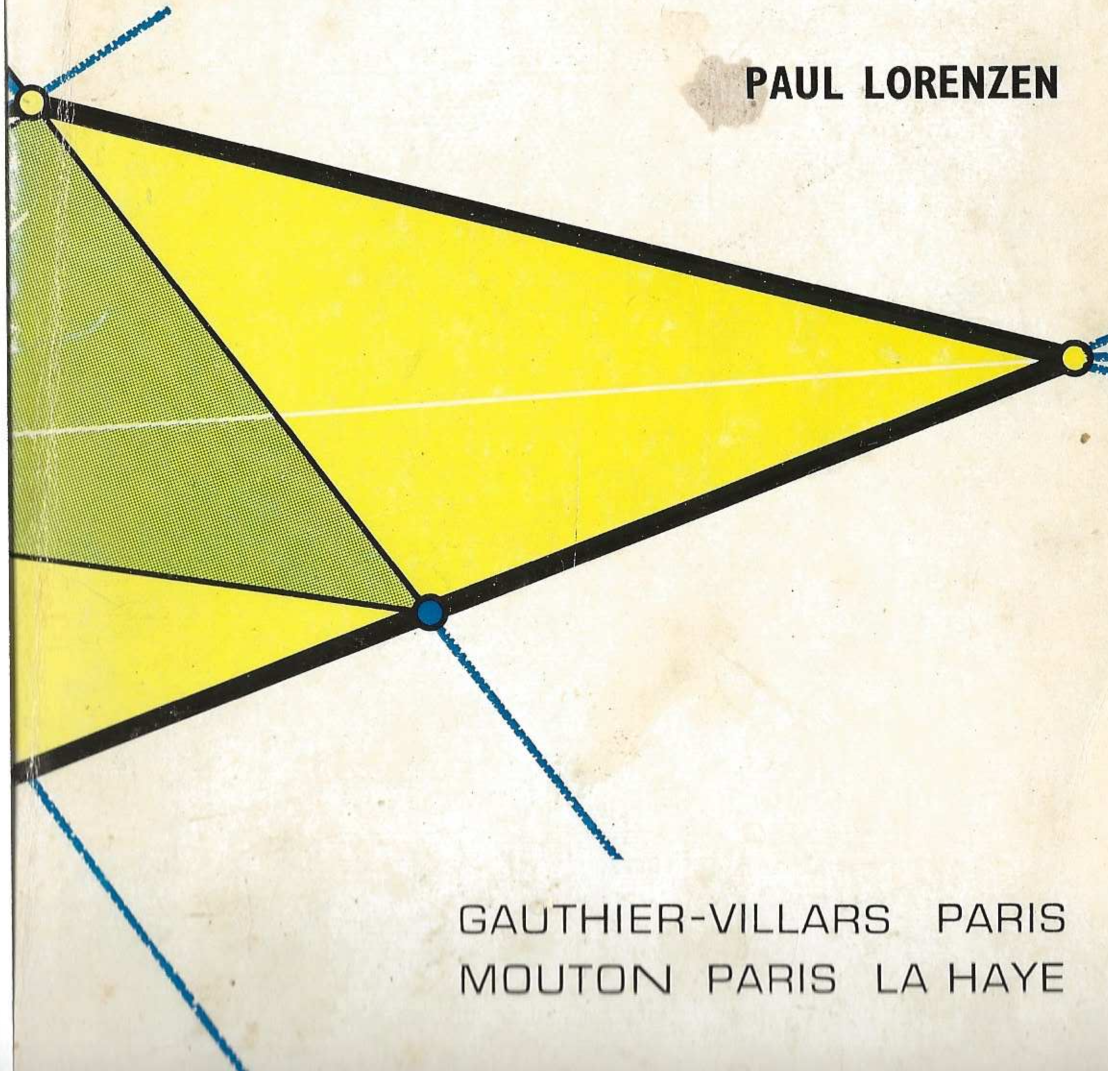
MATHEMATIQUES ET SCIENCES DE L'HOMME

MÉTAMATHÉMATIQUE

PAUL LORENZEN



GAUTHIER-VILLARS PARIS
MOUTON PARIS LA HAYE

de $\neg A \vee B$ et inversement. Introduisons alors un nouveau joncteur $\rightarrow$, tel que $A \rightarrow B$ soit une abréviation pour $\neg A \vee B$. Dans ces conditions A implique B si et seulement si la formule $A \rightarrow B$ est logiquement vraie. La fonction propositionnelle relative à $\rightarrow$ est souvent appelée *implication* et, plus précisément, « implication matérielle ». Toutefois, pour la distinguer de la relation d'implication définie plus haut, nous l'appellerons dans ce qui suit *conditionnelle*[4].

Inversement, si on prend l'implication logique comme concept de départ, on peut y ramener la vérité logique. Considérons, en effet, une formule quelconque logiquement vraie, par exemple $a \vee \neg a$. Puisque cette formule a la valeur $\curlyvee$ pour toute interprétation, désignons-la elle-même par $\curlyvee$. (Au lieu de $\neg\curlyvee$ nous écrirons de façon analogue $\curlywedge$.) Avec cette convention, une formule A est logiquement vraie si et seulement si $\curlyvee$ implique logiquement A, si donc on a $\curlyvee \prec A$.

§ 2. Logique effective des joncteurs et des quantificateurs

La logique des joncteurs exposée au § 1, résultait de ce que les propositions considérées étaient v-définies. Le problème de leur valeur de vérité devait toujours être (effectivement) décidable. Mais toutes les propositions correctement formulées de la langue naturelle sont-elles v-définies ? Évidemment non. Pour trouver des contre-exemples, il n'est pas nécessaire de chercher des propositions dont on peut se demander si elles ont véritablement un sens, comme par exemple « maintenant je mens » ou « la structure de l'espace réel est euclidienne ». Il y a déjà bien suffisamment d'exemples parmi les propositions dont personne ne peut douter sérieusement qu'elles sont significatives.

Considérons l'affirmation suivante sur les nombres parfaits : « Il y a des nombres impairs qui sont parfaits ». (« Parfait » qualifie un nombre qui est égal à la somme de ses diviseurs propres. Ainsi $6 = 1 + 2 + 3$ et $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ sont parfaits).

On voit bien comment il faudrait prouver la vérité de cette proposition. Il « suffirait » de trouver un nombre impair n tel que le calcul de la somme de ses diviseurs propres donne précisément n (et une telle somme peut se calculer effectivement). Toutefois, jusqu'à maintenant, personne ne connaît un tel nombre, et personne ne sait non plus si un jour quelqu'un en trouvera un. De plus, on ne voit pas du tout à quel procédé général on pourrait faire

4. L'auteur utilise ici le terme, aujourd'hui rare, de *Subjunktion*. J'ai suivi la suggestion de V. W. Quine et appelant « conditionnelle » cette fonction propositionnelle.

appel pour prouver la proposition « aucun nombre impair n'est parfait ». Nous ne disposons ainsi d'aucun procédé pour décider de la vérité de la proposition : « il y a des nombres impairs qui sont parfaits ». Quel sens y a-t-il alors à dire néanmoins que cette proposition est soit vraie, soit fausse, qu'« en soi » elle est vraie ou fausse ? On pourra valablement répliquer : pourquoi ne pourrait-on pas *admettre* que la proposition est soit vraie soit fausse, même si on ne sait pas (encore) effectivement ce qu'il en est ? A quoi on répondra par une nouvelle question: Admettre que toute proposition est soit vraie soit fausse — sans vouloir dire par là que cette disjonction est effectivement décidable — ne revient-il pas à dire seulement que :

(1) aucune proposition n'est à la fois vraie et fausse
et (2) aucune proposition n'est à la fois non vraie et non fausse ?

Comme la fausseté d'une proposition $\mathfrak{a}$ revient à la vérité de $\neg \mathfrak{a}$, ces deux principes peuvent être symbolisés comme suit :

(1) $\neg (\mathfrak{a} \wedge \neg \mathfrak{a})$
(2) $\neg (\neg \mathfrak{a} \wedge \neg \neg \mathfrak{a})$

En logique classique des joncteurs (1) et (2) sont équivalents à $\mathfrak{a} \vee \neg \mathfrak{a}$. S'en suit-il alors, par exemple, que la proposition « Il y a des nombres impairs qui sont parfaits ou aucun nombre impair n'est parfait » est logiquement vraie ? Il est pour le moins douteux que la logique classique des joncteurs soit ici applicable ou qu'elle soit « onbetrouwbaar » pour utiliser l'expression par laquelle BROUWER caractérise la situation. Il en est tout autrement d'une proposition comme « il y a des planètes qui n'ont pas de satellite ». Dans ce cas, on part du fait qu'on pourrait s'assurer de l'existence d'un satellite. Il n'y a de plus qu'un nombre fini de planètes. L'examen de tous les cas individuels fournit donc « en principe » le procédé de décision. Mais « en principe » aussi, on ne peut examiner la perfection de tous les nombres impairs, puisqu'il en existe une infinité. Il est donc tout simplement faux de prétendre pouvoir traiter l'infini comme le fini. Le problème qui s'est posé à la logique classique ensuite de la critique de BROUWER, consiste à rechercher dans quelle mesure la logique doit être modifiée pour s'appliquer aux classes infinies.

Comme les joncteurs de la logique classique sont définis par des fonctions de vérité, ils devront être redéfinis si on laisse tomber l'hypothèse classique selon laquelle on a affaire à des propositions v-définies. Dans le cas qui nous occupe « il y a des nombres impairs qui sont parfaits », la proposition n'est pas v-définie et nous avons vu comment on peut décider s'il en existe une preuve. Il faut fournir un nombre impair n et le calcul de la somme des diviseurs propres de n doit redonner n. On a donc là un procédé qui permet de décider, non de la vérité d'une proposition, mais du statut de « preuve » d'une certaine procédure (procédure qui consise normalement à écrire des propositions). Toute proposition, accompagnée d'un tel procédé de décision, pourra être appelée *p-définie*[5]. Il n'est pas plus nécessaire de définir ici le concept de preuve qu'il n'était nécessaire de définir celui de vérité à propos des propositions v-définies. Il suffit, dans les deux cas, que soit donné un procédé quelconque de décision.

Nous allons, dans ce qui suit, introduire une logique « effective » où la vérité logique des propositions sera définie sous l'hypothèse qu'elles sont construites à partir de propositions p-définies. En général, les propositions composées ne seront plus p-définies. Elles seront néanmoins toutes « définies » en un sens plus large que nous allons introduire.

Les compositions de propositions p-définies avec $\wedge$ et $\vee$ sont certainement encore p-définies, si on pose ce qui suit. On aura une preuve de $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$ en fournissant une preuve de $\mathfrak{a}$ *et* une preuve de $\mathfrak{b}$. Nous supposerons que le lecteur comprend ce que veut dire faire une chose *et* encore une chose, l'une après l'autre. Si tel n'était pas le cas, il lui faudra suivre un enseignement pratique pour l'apprendre! Il s'agit de quelque chose qu'on ne peut pas plus apprendre dans un livre, qu'on ne peut, par exemple, apprendre à lire dans un manuel, si on ne sait pas encore lire.

Pour $\vee$, nous poserons qu'on aura une preuve de $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$, en fournissant une preuve de $\mathfrak{a}$ ou une preuve de $\mathfrak{b}$, donc de l'une des deux propositions à choix.

La définition que nous venons de donner de la preuve d'une adjonction s'étend sans peine de deux propositions à plusieurs et même à une infinité. Soit $\mathfrak{a}(x)$ une forme propositionnelle arithmétique qui ne contient qu'une seule variable x pour les nombres dits naturels 0, 1, 2, ..., par exemple « x est parfait ». Soit encore la proposition $\mathfrak{a}(n)$, p-définie pour tout nombre naturel n. A partir de telles formes propositionnelles, on construira de nouvelles propositions $\bigvee_x \mathfrak{a}(x)$ (« pour quelque x : $\mathfrak{a}(x)$ ») et nous poserons ce qui suit : On aura une preuve de $\bigvee_x \mathfrak{a}(x)$ en fournissant un nombre naturel n *et* une preuve de $\mathfrak{a}(n)$.

Il s'ensuit que $\bigvee_x \mathfrak{a}(x)$ est une *adjonction infinie*, que l'on pourrait tout aussi bien écrire $\mathfrak{a}(0) \vee \mathfrak{a}(1) \vee \mathfrak{a}(2) \vee \ldots \vee \mathfrak{a}(n) \ldots$ (à condition de ne rien changer à ce qu'il faut entendre par une preuve). Mais il est clair que $\bigvee_x \mathfrak{a}(x)$ est une notation plus commode. De même, en mathématiques, on écrit plus volontiers $\sum_x f(x)$ au lieu de $f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots$.

5. L'allemand dit *beweisdefinit*, littéralement « défini au sens d'une preuve ». J'ai introduit « p-défini » par analogie avec « v-défini ».

On ne peut évidemment pas introduire d'une façon analogue une *conjonction infinie* sous forme d'une proposition p-définie. Il n'est pas possible d'exiger de celui qui affirme « pour tout x : $\mathfrak{a}(x)$ » (en symboles : $\bigwedge_x \mathfrak{a}(x)$, où $\mathfrak{a}(x)$ est de nouveau une forme propositionnelle arithmétique telle que toutes les propositions $\mathfrak{a}(n)$ soient p-définies) qu'il s'oblige à fournir encore une « preuve » de son affirmation. Ce qu'il dit a un sens dès qu'il s'engage à fournir une preuve de $\mathfrak{a}(n)$, pour tout n qu'on lui propose. Le champ des éventualités, pour lequel il faut s'assurer qu'on pourra toujours faire face à l'obligation qu'on assume en soutenant $\bigwedge_x \mathfrak{a}(x)$, n'est encore nullement limité. Il est d'ailleurs inutile d'entrer dans la problématique d'une telle limitation, sitôt qu'on renonce à faire des universelles comme $\bigwedge_x \mathfrak{a}(x)$ des propositions p-définies. En vertu de ce qui précède, les propositions universelles sont définies en un sens plus large, à savoir au sens du dialogue (propositions *d-définies*[6]).

Imaginons deux personnes, dont la première affirme $\bigwedge_x \mathfrak{a}(x)$. La seconde est alors en droit de choisir à volonté un nombre naturel n. Si la première personne peut fournir la preuve qui correspond à $\mathfrak{a}(n)$, elle a gagné. Sinon elle a perdu. L'issue du dialogue est ainsi toujours déterminée et c'est pourquoi on peut considérer les propositions universelles comme d-définies. D'une façon générale, une proposition sera dite *d-définie* si, pour la soutenir dans un dialogue, les règles des deux partenaires sont déterminées de telle sorte qu'on peut décider à chaque instant (1) si le dialogue est terminé et (2) qui, dans ce cas, a gagné. « Je passe » n'est pas autorisé.

Partons de propositions p-définies. Toutes les compositions qu'on peut former à l'aide d'un nombre fini ou non de conjonctions et d'adjonctions sont, comme il résulte de ce qui précède, d-définies. On reste encore dans le même champ de propositions en introduisant une négation $\neg$ de la façon suivante. Si le premier des deux partenaires affirme $\neg\, \mathfrak{a}$ à partir d'une proposition d-définie $\mathfrak{a}$, le second a le droit (1) d'accepter l'affirmation (il dit quelque chose comme « non dubito », en symbole « ‽ ») et le premier a gagné ou (2) d'affirmer $\mathfrak{a}$ de son côté. Alors, selon que le second gagne ou perd ce dialogue commencé par $\mathfrak{a}$, le premier a perdu ou a gagné. Ainsi $\neg\, \mathfrak{a}$ ne peut être gagné que si le partenaire a pu être contraint à perdre $\mathfrak{a}$. En conséquence, il serait préférable de traduire $\neg\, \mathfrak{a}$ par « $\mathfrak{a}$ est réfutable » plutôt que par « non-$\mathfrak{a}$ ».

Essayons de jouer $\neg.\, \mathfrak{a} \wedge \neg\, \mathfrak{a}.$ selon ces règles. Celui qui commence le dialogue par une affirmation — nommons-le le *proposant P* — pourra toujours, dans le cas de $\neg.\, \mathfrak{a} \wedge \neg\, \mathfrak{a}.$ gagner contre son adversaire, l'*opposant O*.

6. L'allemand dit *dialogisch-definit*, littéralement « défini au sens du dialogue », ce que j'ai traduit par « d-défini ».

	O		P	
(1)			$\neg.\, \mathfrak{a} \wedge \neg \mathfrak{a}.$	
(2)	?	$\mathfrak{a} \wedge \neg \mathfrak{a}$		? 1
(3)		$\mathfrak{a}$		? 2
(4)		$\neg \mathfrak{a}$		$\mathfrak{a}$

Ce tableau représente la stratégie de gain pour P. La division des colonnes, à partir de la ligne (2), est due au fait que O peut choisir entre ? et $\mathfrak{a} \wedge \neg \mathfrak{a}$. A la souscolonne de droite, P déclare « ? 1 » (*dubito :* 1) et O doit répondre par le premier terme $\mathfrak{a}$ de la conjonction. P met ensuite en cause le second terme et peut, à son tour, répondre $\mathfrak{a}$ à la riposte $\neg \mathfrak{a}$ de O. Si maintenant O réclamait une preuve de $\mathfrak{a}$, P pourrait d'abord l'exiger de O, puisque celui-ci a déjà affirmé $\mathfrak{a}$ plus haut. P dispose donc toujours d'une stratégie de gain, s'il a soin de n'affirmer que des propositions qui ont été préalablement soutenues par O.

Pour la proposition, logiquement vraie en logique classique, $\mathfrak{a} \vee \neg \mathfrak{a}$, le tableau a l'allure suivante :

	O		P	
(1)			$\mathfrak{a} \vee \neg \mathfrak{a}$	
(2)	?		$\mathfrak{a}$	$\neg \mathfrak{a}$
(3)	?	$\mathfrak{a}$		

Ici, à la ligne (2), P a le choix entre $\mathfrak{a}$ et $\neg \mathfrak{a}$. S'il choisit $\mathfrak{a}$ et ne peut en apporter la preuve, il perdra. En revanche s'il choisit $\neg \mathfrak{a}$, il perdra si O peut prouver la thèse $\mathfrak{a}$. Donc P ne peut gagner $\mathfrak{a} \vee \neg \mathfrak{a}$ que s'il sait soit (1) comment prouver $\mathfrak{a}$, soit (2) que l'opposant ne peut pas prouver $\mathfrak{a}$. En conséquence P ne peut pas, en général, gagner cette thèse. Car, si P sait seulement, par exemple, que son opposant connait deux nombres amis (c'est-à-dire deux nombres dont chacun est la somme des diviseurs propres de l'autre), cela ne lui donnera pas pour autant le moyen de trouver, lui aussi, deux nombres amis. Et il ne pourrait que par hasard tomber tout justement sur 220 et 284. On voit apparaître ici une différence entre les deux formes propositionnelles $\neg.\, \mathfrak{a} \wedge \neg \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a} \vee \neg \mathfrak{a}$, qui sont toutes deux logiquement vraies au sens classique des joncteurs (c'est-à-dire par rapport aux propositions v-définies). On peut toujours, dans un dialogue, gagner les propositions de la forme $\neg.\, \mathfrak{a} \wedge \neg \mathfrak{a}$, mais pas les propositions de la forme $\mathfrak{a} \vee \neg \mathfrak{a}$. Dans le second cas il faut en effet se décider effectivement entre $\mathfrak{a}$ et $\neg \mathfrak{a}$ et on ne peut le faire que sur la base du contenu de $\mathfrak{a}$ et non sur celle de sa seule forme.

Nous sommes ainsi conduits à une nouvelle notion de vérité logique, plus forte que celle de la logique classique utilisée jusqu'ici. Il s'agit de la vérité logique effective d'une forme propositionnelle. Nous dirons qu'une forme propositionnelle est *logiquement vraie de façon effective*[7] si et seulement s'il est possible de gagner dans un dialogue toute proposition de cette forme (contre tout opposant). Cette définition ne suffit pas à caractériser la vérité effective de manière satisfaisante. Nous avons dû en effet nous référer à toutes les propositions — et à tous les opposants alors que, dans la mesure où la logique formelle est l'étude des formes propositionnelles, chacun des concepts utilisé ne peut être défini qu'en termes des formes.

Avant de donner cependant une définition satisfaisante, nous allons étendre encore le champ des formes propositionnelles à la conditionnelle (effective). En logique classique $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ n'était introduite que comme une abréviation pour la proposition $\neg \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$. Mais si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont d-définies, l'usage dans un dialogue de $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ peut se faire de la façon suivante, en accord satisfaisant avec la signification courante de l'expression « si $\mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{b}$ ». Si le premier partenaire affirme $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$, le second a le choix entre ? et $\mathfrak{a}$. Dans le cas ?, le premier partenaire a gagné. Dans le cas $\mathfrak{a}$, il doit affirmer $\mathfrak{b}$, pour le cas où le second peut justifier son affirmation $\mathfrak{a}$. Le gain et la perte suivent l'issue du dialogue avec $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$. Cette procédure diffère de celle utilisée pour $\neg \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$. Ainsi par exemple $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$ peut toujours se gagner, au contraire de $\neg \mathfrak{a} \vee \mathfrak{a}$. Si P en effet affirme une proposition $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$, il ne s'engage qu'à soutenir $\mathfrak{a}$ si O l'a soutenu auparavant. Il s'ensuit que la conditionnelle effective $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ n'est nullement une abréviation pour $\neg \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$.

Examinons deux exemples de dialogues systématiquement conduits et de leurs stratégies de gain.

	O	P
(1)		$\neg\neg \bigwedge_x \mathfrak{a}(x) \rightarrow \bigwedge_x \neg\neg \mathfrak{a}(x)$
(2)	$\neg\neg \bigwedge_x \mathfrak{a}(x)$	$\bigwedge_x \neg\neg \mathfrak{a}(x)$
(3)	$?\, n$	$\neg\neg \mathfrak{a}(n)$
(4)	$\neg \mathfrak{a}(n)$	$\neg \bigwedge_x \mathfrak{a}(x)$
(5)	$\bigwedge_x \mathfrak{a}(x)$	$?\, n$
(6)	$\mathfrak{a}(n)$	$\mathfrak{a}(n)$

A la ligne (2), O suivant la règle pour $\rightarrow$, répond par l'antécédent et P par le conséquent. A la ligne (3), O demande une justification de $P(2)$ et P

7. Il sera éventuellement commode de dire aussi « effectivement l-vrai », où « l-vrai » traduit l'allemand *logisch-wahr*.

répond en conséquence. A la ligne (4), O retient l'affirmation $P(3)$ et P riposte en attaquant $O(2)$. Là-dessus O attaque $P(4)$, P réclame une justification de $O(5)$, O répond en conséquence et P peut alors attaquer $O(4)$ et gagner. Cet exemple montre clairement la façon dont les règles données jusqu'ici doivent être appliquées dans un dialogue. A chaque ligne, P n'a qu'à justifier la dernière affirmation qu'il a posée, tandis que O doit pouvoir défendre toutes les affirmations qu'il a posées jusque là. Cette dissymétrie est rendue nécessaire par le fait que — si nous ne retenons que la forme des propositions — O est à même de poser sans preuve n'importe quelle proposition atomique.

Un exemple de thèse que P ne peut pas gagner en se basant uniquement sur la forme est le suivant:

	O		P	
(1)			$\bigwedge_x \neg\neg\, \mathfrak{a}(x) \to \neg\neg \bigwedge_x \mathfrak{a}(x)$	
(2)	$\bigwedge_x \neg\neg\, \mathfrak{a}(x)$		? n	$\neg\neg \bigwedge_x \mathfrak{a}(x)$
(3)	$\neg\neg\, \mathfrak{a}(n)$	$\neg \bigwedge_x \mathfrak{a}(x)$	$\neg\, \mathfrak{a}(n)$	$\bigwedge_x \mathfrak{a}(x)$
(4)	$\mathfrak{a}(n)$	? m	?	$\mathfrak{a}(m)$
(5)		?		

A la ligne (2), P peut choisir. Ou, dans la sous-colonne de gauche, il demande justification de $O(2)$, ou il répond par le conséquent. A la ligne (3.1), O répond comme il le doit, P attaque (3.1) et perd si O peut répondre à la ligne (4) par $\mathfrak{a}(n)$. A la ligne (3.2), O attaque l'affirmation $P(2.2)$. P doit riposter par une attaque de $O(3.2)$ et il perd s'il ne peut prouver $\mathfrak{a}(m)$ pour le m choisi par O. P ne serait certain de gagner que s'il connaissait un n tel que O ne puisse prouver $\mathfrak{a}(n)$, ou qu'il puisse lui-même prouver $\mathfrak{a}(m)$ pour tout m. Mais il s'agit-là d'une connaissance que P ne peut acquérir qu'en s'appuyant sur le contenu de $\mathfrak{a}(x)$ et il ne peut établir sa thèse sur la base de la forme seulement.

Introduisons enfin une dernière possibilité en posant les règles suivantes pour $\curlyvee$ et $\curlywedge$:

On ne peut mettre $\curlyvee$ en doute.

Celui qui affirme $\curlywedge$ a perdu.

Dès lors la négation $\neg\, \mathfrak{a}$ peut être remplacée par la conditionnelle $\mathfrak{a} \to \curlywedge$, en ce sens que, selon nos conventions, les deux propositions ont même portée dans un dialogue. Nous maintiendrons toutefois la négation comme joncteur autonome.

Le champ des formules (des formes propositionnelles) à considérer en logique effective comporte donc :

(1) Formules atomiques :

$$\begin{array}{l} \curlyvee, \curlywedge \\ a^0, b^0, \ldots \\ a^1x, b^1x, \ldots \\ a^2xy, b^2xy, \ldots \\ a^3xyz, \ldots \\ \ldots\ldots \end{array}$$

(Il s'agit de symboles de propositions et de formes propositionnelles avec une ou plusieurs variables d'objets).

(2) Quelles que soient les formules A et B, les formules

$$A \wedge B,\ A \vee B,\ A \to B.$$

(3) Quelle que soit le formule A, la formule $\neg A$.

(4) Quelles que soient la formule A et la variable d'objet x, les formules $\bigwedge_x A$ et $\bigvee_x A$.

On n'utilisera dans le dialogue que celles de ces formules qui sont *fermées*, c'est-à-dire celles où ne figure aucune variable d'objet libre. Cela revient à dire que toute variable d'objet qu'on peut rencontrer se trouve dans le domaine d'action d'un quantificateur $\bigwedge_x$ ou $\bigvee_x$. Les formules fermées s'appellent aussi des *propositions*. Il faut cependant prendre garde de ne pas confondre ces « propositions » avec celles qui précèdent et que nous avons désignées par les variables $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$. A partir de la formule non fermée $A(x_1, \ldots, x_r)$ — $x_1, \ldots, x_r$ sont toutes les variables libres qui y figurent — on obtient de nouvelles formules fermées en substituant des *constantes* aux variables. Pour disposer d'un nombre suffisant de constantes et ne pas y revenir, nous prendrons une fois pour toutes comme constantes les nombres 1, 2, 3, ... (sans le zéro). Si alors $A(x_1, \ldots, x_r)$ par exemple est une formule dans laquelle $x_1, \ldots, x_r$ sont les seules variables libres, $A(1, 2, \ldots, r)$ est une formule fermée.

Il nous faut maintenant préciser l'usage des formes propositionnelles dans le dialogue, de telle façon qu'il corresponde à celui des propositions quelconques de cette forme. Il suffira de le faire pour les formules fermées atomiques, c'est-à-dire pour les propositions atomiques :

$$\begin{array}{l} a^0, b^0, \ldots \\ a^1 1, b^1 2, \ldots \\ a^2 12, b^2 23, \ldots \\ a^3 123, \ldots \\ \ldots\ldots \end{array}$$