Lacan et la logique intuitionniste

I - Le déchaînement de la vérité éclairé par la logique intuitionniste

*Christian Even et Éric Laurent**

Éric Laurent : Nous avons considéré cette année la question de l'éthique de la psychanalyse à partir de la critique radicale faite par Lacan de la fausse universalité de la règle et de ce qui apparaît comme une sorte d'effet nocif de l'établissement de la causalité scientifique. Nous avons ainsi suivi la façon dont il fraye les chemins d'une éthique de la psychanalyse qui échappe aux naïvetés de la morale hédoniste. Cette question est cruciale et fait partie de la perspective centrale de la philosophie morale de notre époque — voire même de la philosophie du lien social interrogée aux États-Unis et en Angleterre autour du concept de ce qui fait une communauté, dans de nombreuses publications dont nous aurons sûrement des retombées en France dans les prochaines années. Ce qui est crucial dans cette perspective, c'est l'examen du concept ou de la notion de « tout » — ce qui fait le tout comme l'espace d'une règle —, et la critique que Lacan a livrée, à l'aide de la psychanalyse, aux fausses notions de tout.

Cela a culminé dans sa formulation du pas-tout comme au cœur de la différence sexuelle, ce qui nous amène au cours d'aujourd'hui, où je vais donner la parole à quelqu'un qui a eu la gentillesse de s'engager à présenter sa contribution à ce type de problématique, autour de l'usage que fait Lacan de la logique intuitionniste**. Il vous parlera donc de la logique intuitionniste à partir d'une séance très précise du séminaire "D'un discours qui ne serait pas du semblant", compagnon du texte « Introduction à l'édition allemande des *Écrits* »[1] et de *Télévision*.

Dans ce séminaire, Lacan poursuit ce que Jacques-Alain Miller dans son cours de l'année dernière et de cette année centre sur la question du sens et de la fuite du sens. A propos de la fuite de l'ensemble dont la frontière ne se définit pas, Lacan, dans ces années-là, recourt à la logique intuitionniste qui jusque là n'avait pas figuré dans ses écrits ou dans ses séminaires comme au premier rang de ses préoccupations ; il prend des cours de logique sur cette question et dialogue avec un logicien, Pierre Lavalle, sur quelques points de son enseignement que va reprendre Christian Even. Cette logique intuitionniste est en effet centrée sur les problèmes de définition du tout, des touts admissibles et des touts non admissibles. C'est central ; vous trouverez aussi une référence à cette logique dans le Séminaire *Encore* [2], à l'issue du chapitre sur « Savoir et vérité ». Ce recours vient là pour situer, reformuler la tension des rapports entre savoir et vérité. Vous trouverez donc ceci :

> « [...] dès que vous avez affaire à un ensemble infini, vous ne sauriez poser que le pas-tout comporte l'existence de quelque chose qui se produit d'une négation, d'une contradiction. Vous pouvez à la rigueur le poser comme d'une existence indéterminée. Seulement, on sait par

* *Première de deux leçons du Cours 1995/96 d'Éric Laurent à la Section Clinique de Paris, "L'interprétation lave-t-elle de la faute ?", données les 22 mai et 5 juin 1996. La leçon suivante est publiée à la suite dans ce numéro de* Cahier. *Texte établi par Marcel Eydoux et Gilles Chatenay.*

** *(N.D.L.R.) : Bien que J. Largeault (in «* L'intuitionisme *», Que sais-je ? N° 2684) dise que le terme doit s'écrire avec un seul* n, *nous avons opté pour une orthographe plus familière.*

1 *J. Lacan, " Introduction à l'édition allemande d'un premier volume des Écrits (Walter Verlag) ",* Scilicet *N° 5, Seuil, Paris, 1975, pp. 11-17.*

2 *J. Lacan,* Le Séminaire, livre XX, Encore, *Seuil, Paris, 1975, p. 94.*

l'extension de la logique mathématique, celle qui se qualifie précisément d'intuitionniste, que pour poser un « il existe », il faut aussi pouvoir le construire […] »

Cela, c'est un petit peu comme la poésie, n'est-ce pas : il y a ceux qui connaissent déjà bien ce type de problèmes, et aux autres, cela leur donne la musique, et ils apprennent que c'est décisif sur les questions de l'ensemble, du tout, et du « il existe ».

Christian Even n'est pas un amateur sur ces questions, il est agrégé de mathématiques, il a une formation de logicien, il n'est donc pas un pur autodidacte à cet égard. Il va maintenant vous développer la question. Je pense qu'il faut qu'il prenne son temps, son texte le mérite, c'est compliqué.

L'adresse à la vérité

Christian Even : Il y a deux parties dans cet exposé : dans la première partie, je vais discuter de la logique intuitionniste en prenant pour point de départ une leçon du séminaire "D'un discours qui ne serait pas du semblant", et dans un deuxième temps, je vais parler des paradoxes que Lacan a souvent évoqués dès le séminaire "L'Identification", et qui sont associés aux problèmes de consistance, à savoir de non-contradiction.

Avant de relire certains passages de cette séance, je vais faire un petit résumé de ce qui les précède. Lacan s'attache à préciser le rapport à la vérité qui résulte de l'association libre — il souligne bien sûr qu'il s'agit là d'une référence ironique à la liberté. Ce qu'il nous dit, c'est que si l'association libre révèle quelque chose des effets du langage, ce n'est pas sans en passer par l'écrit ; celui-ci est second par rapport à la fonction du langage, mais n'en demeure pas moins nécessaire à interroger le lieu de l'Autre de la vérité. Interroger avec l'écrit le lieu de l'Autre de la vérité, c'est ce qu'il appelle — il introduit ici ce néologisme — "demansion" [demande, dimension]. Il insiste sur le fait qu'il n'y a pas de logique sans écrit, mais que cela ne fait pas pour autant de la logique un métalangage, celle-ci ne se construisant que de sa référence au langage. A partir de là, il va reprendre et transformer la prosopopée de "La Chose freudienne" : "moi, la Vérité, je parle" :

> "La Vérité parle *je*, cela veut dire qu'on peut lui dire "tu ", et je vais vous expliquer à quoi cela sert. Vous allez croire bien sûr que je vais vous dire que cela sert au dialogue — il y a longtemps que j'ai dit qu'il n'y avait pas de dialogue, et avec la Vérité, bien sûr, encore moins." [3]

Mais ici en fait il va s'agir de dialogue écrit ; or justement Lacan insiste sur le fait que ce n'est qu'à partir de l'écrit que peuvent éclater les paradoxes — celui du menteur, classique ; ou celui par exemple de : qu'est-ce que de pouvoir parler du plus petit nombre qui ne peut pas se définir en moins de quinze mots ? La définition de ce nombre introduit une contradiction, j'y reviendrai plus tard.

3 J. Lacan, "Le Séminaire, livre XVIII, D'un discours qui ne serait pas du semblant", inédit, séance du 17 février 1971.

Autrement dit, ces paradoxes témoignent d'une impasse. Quel lapin a-t-on mis, et dans quel chapeau, pour qu'il en ressorte une impasse ? C'est la question qu'on peut se poser. Plus tard, il dira que

"dans cet échec même [donc dans cette impasse de la logique...] peut se démontrer tout ce qu'il en est de l'articulation qui précisément a le rapport le plus étroit avec le fonctionnement du langage, c'est-à-dire l'articulation suivante : c'est à savoir que le rapport, le rapport sexuel, ne peut être écrit."[4]

Peut-être cela pourrait-il aussi nous servir à interroger une autre phrase de *L'Envers de la psychanalyse*, où il dit : "La division du sujet n'est sans doute rien d'autre que l'ambiguïté radicale qui s'attache au terme de vérité"[5]. Je vais d'abord lire le dialogue :

"Alors la Vérité, vous vous apercevrez qu'exactement comme dans la métamathématique de Lorenzen, si vous posez qu'on ne peut pas à la fois dire "oui" et "non" sur le même point, eh bien vous gagnez. Mais si vous misez que c'est ou oui ou non, là vous perdez ; référez-vous à Lorenzen. Mais je vais vous l'illustrer tout de suite."

"Je pose : Il n'est pas vrai — dis-je à la Vérité —, que tu dises vrai et que tu mentes en même temps. La Vérité peut répondre bien des choses, puisque c'est vous qui la faites répondre. Cela ne vous coûte rien. De toutes façons cela va aboutir au même résultat, mais je vous le détaille pour rester collé à Lorenzen. Elle dit : je dis vrai. Vous lui répondez : je ne te le fais pas dire. Alors pour vous emmerder, elle vous dit : je mens. A quoi vous répondez : maintenant j'ai gagné, je sais que tu te contredis. Cela n'a plus de portée. Que l'inconscient dise toujours la vérité et qu'il mente, c'est de chez lui parfaitement soutenable. C'est simplement à vous de le savoir.

"Qu'est-ce que cela vous apprend ? Que la vérité, vous n'en savez quelque chose que quand elle se déchaîne, car elle s'est déchaînée : elle a brisé votre chaîne. Elle vous a dit les deux choses aussi bien quand vous disiez que la conjonction n'était point soutenable. Mais supposez au contraire que vous lui ayez dit : ou tu dis vrai, ou tu mens. Bon. Là, vous en êtes pour vos frais, parce que c'est ce qu'elle vous répond : je te l'accorde, je m'enchaîne, tu me dis : ou tu dis vrai, ou tu mens, et en effet c'est bien vrai. Seulement alors là vous, vous ne savez rien. Vous ne savez rien de ce qu'elle vous a dit puisque ou elle dit vrai, ou elle ment. De sorte que vous êtes perdant. Je ne sais pas si cela vous apparaît dans sa pertinence, mais cela veut dire ceci, dont nous avons constamment l'expérience, c'est qu'elle se refuse, la Vérité, alors cela me sert à quelque chose. C'est à cela que nous avons tout le temps à faire dans l'analyse. Mais qu'elle s'abandonne, qu'elle accepte ma chaîne quelle qu'elle soit, eh bien, j'y perds mon latin."

"Autrement dit, cela me laisse à désirer. Cela me laisse à désirer, cela me laisse dans ma position de demandeur, puisque je me trompe de penser que je suis traité d'une vérité que je ne puis reconnaître qu'au titre de déchaînée. Vous montrez de quel déchaînement vous participez."

Écritures du dialogue : refus et déchaînement

Cela, c'est mon point de départ, parce que je me suis aperçu que ces dialogues peuvent s'écrire dans la logique intuitionniste. Je vais donc d'abord vous les écrire, et puis ensuite on verra les règles.

4 op. cit., *séance du 18 mai 1971.*

5 *J. Lacan,* Le Séminaire, livre XVII, L'Envers de la psychanalyse, *Seuil, Paris, 1991, p. 206.*

Donc le premier dialogue, c'est un dialogue entre le sujet, qui est le proposant P, et puis celui qui est son contradicteur, disons, qui est l'opposant O, qui est censé être, là, la Vérité.

- E. L. : Quand Lacan disait : je vous renvoie à Lorenzen[6], c'est donc à ses tableaux qu'il renvoyait. Au fond, Pierre Lavalle[7] n'avait pas fait exactement le même travail que vous, il était parti de Lorenzen lui-même. Ce que vous, vous montrez, ce que vous allez reconstruire, c'est à quel point Lacan parle le dialogue de Lorenzen et refait sa prosopopée de "La Chose freudienne" à partir de cette écriture.

- C. E. : Reprenons le dialogue. "Misons qu'on ne peut pas dire à la fois oui et non sur le même point..." : donc ici l'enjeu de P c'est de nier la conjonction de A et de sa négation : $\neg (A \wedge \neg A)$ [8] [noté dans le schéma en (i)].

Nous disions que O a une fonction de contradicteur : cela l'engage, s'il veut vraiment contredire P, à soutenir la conjonction : $A \wedge \neg A$ (ii). Mais maintenant, s'il soutient la conjonction, c'est qu'il se doit de soutenir à la fois A et non-A. Il soutient donc d'abord A (iii), puis $\neg A$ (iv).

Premier dialogue

	O	P
		(i) $\neg (A \wedge \neg A)$
(ii)	$A \wedge \neg A$	
(iii)	A	
(iv)	$\neg A$	
		(v) A

Or, si O soutient $\neg A$, cela fonde P à soutenir A. Mais dès lors O ne remplit plus sa fonction de contradicteur, puisqu'il avait déjà dit la même chose que P, à savoir A. C'est pourquoi ici P gagne. C'est ainsi que s'écrit le dialogue.

Quel est le but du proposant ? P aura démontré sa proposition s'il est parvenu à faire dire à O la même chose que ce que lui-même soutient. Dans la pratique, cela se traduit par le critère suivant : *si une formule apparaît des deux côtés, c'est gagné.*

Voyons maintenant pour le second dialogue. Justement celui-là, P ne peut pas le gagner dans la logique intuitionniste. Si P mise A ou non-A [$A \vee \neg A$], il rencontre un obstacle, on le reverra dans l'examen des règles. Cela tient à ce que la logique intuitionniste — que nous sommes en train d'esquisser — impose que si vous soutenez une disjonction, c'est-à-dire une alternative, vous devez choisir : soit c'est l'un, soit c'est l'autre.

Essayons : on peut choisir A, mais ce qui se passe alors dans la logique intuitionniste, c'est que vous perdez votre énoncé initial ($A \vee \neg A$), il est effacé, vous ne pouvez plus vous y référer. Vous restez en carafe avec A, et O peut vous contredire en posant $\neg A$.

Deuxième dialogue

O	P
	$A \vee \neg A$
	effacement
	A
$\neg A$	

Alors vous pourriez dire : oui, mais je peux essayer de l'autre côté : je peux essayer de soutenir $\neg A$. Mais alors O peut dire A.

Je ne pourrai jamais avoir en même temps la même formule des deux côtés ; donc c'est perdu.

6 *P. Lorenzen,* Métamathématique, *Gauthier-Villars, 1967. Texte original édité au Bibliographisches Institut, Mannheim, 1962.*

7 *P. Lavalle, "Si jamais", Ornicar ? N° 12/13, Diffusion Seuil, Paris, 1977, pp. 17-44.*

8 $\neg$ *= non ;* $\wedge$ *= et ;* $\vee$ *= ou.*

- E. L. : Redites-le avec les mots de Lacan.

- C. E. : Ici, pour le premier dialogue: "Je pose qu'il n'est pas vrai — dis-je à la Vérité — que tu dises vrai et que tu mentes en même temps". On a donc :

Premier dialogue, reprise

	O	P
		$\neg(A \wedge \neg A)$ (i)
	$A \wedge \neg A$	
(iii)	A	
(iv)	$\neg A$	
		A (v)

(i) il n'est pas vrai, dis-je à la Vérité, que tu dises vrai et que tu mentes en même temps, $\neg(A \wedge \neg A)$;
(iii) elle dit : je dis vrai ;
(iv) pour vous emmerder elle dit : je mens.
(v) Conclusion : "j'ai gagné, je sais que tu te contredis". Quand le contradicteur se contredit, contredit sa fonction de contradicteur (A se retrouve à droite et à gauche, en (iii) et (v)), c'est que la partie est gagnée.

- E. L. : Il y a là le signe de conjonction : "que tu dises vrai et que tu mentes en même temps". Et Lacan rétablit ici une fonction de parole qui n'est pas absolument évidente, le : "dis-je à la Vérité". Ce n'est plus "moi, la Vérité, je parle", c'est : "à la vérité, je dis « tu »". C'est d'elle qu'il s'agit dans le dialogue, et c'est pourquoi la façon dont Lorenzen l'inscrit sous forme de tableau a tant plu à Lacan. Là, on le voit, c'est : "ce n'est pas vrai — *dis-je à la Vérité* — que tu dises ceci et cela."

- C. E. : Dans le deuxième dialogue, on ne gagne pas, du moins dans la logique intuitionniste : "Tu me dis : ou tu dis vrai, ou tu mens, et en effet, c'est bien vrai" – et ça se termine là, avec le commentaire suivant :

> "vous ne savez rien de ce qu'elle vous a dit, puisque ou elle dit vrai, ou elle ment, de sorte que vous êtes perdant. Ceci, je ne sais pas si cela vous apparaît dans sa pertinence, mais cela veut dire ceci dont nous avons constamment l'expérience, c'est qu'elle se refuse, la vérité. Alors cela me sert à quelque chose : c'est à cela que nous avons tout le temps à faire dans l'analyse, c'est qu'elle s'abandonne ou qu'elle accepte ma chaîne, quelle qu'elle soit, eh bien j'y perds mon latin".

- E. L. : Quand il dit : "elle se refuse toujours, la vérité, alors cela me sert à quelque chose", c'est vraiment le "servir à quelque chose"dans un contexte où se discute l'assertion "*meaning is use*" : le sens, c'est l'usage. Et là, l'usage, c'est la vérité qui se refuse. C'est beau parce que cette vérité qui se refuse fait valoir la dimension d'insaisissable. "La vérité se refuse, et c'est alors qu'elle me sert". Il fait valoir le refus de la vérité comme le véritable usage, le véritable registre de l'usage.

- C. E. : Je vais donc reprendre la fin du passage que j'avais retenu :

> "Autrement dit, cela me laisse à désirer, cela me laisse dans la position de demandeur, puisque je me trompe de penser que je suis traité d'une vérité que je ne puis reconnaître, dit-il, que comme déchaînée ; vous montrez de quel déchaînement vous participez. "

- E. L. : Quand la vérité dit "je m'enchaîne" – pourriez-vous nous montrer sur les tableaux ce que cela veut dire ?

- C. E. : "Je m'enchaîne", c'est dans le deuxième dialogue. "Tu dis vrai", c'est le tableau correspondant au choix de A, "tu mens", c'est le tableau correspondant au choix de ¬A, dans les deux cas vous ne l'avez pas prise en défaut; donc là, elle s'enchaîne. Vous lui dites "ou tu dis vrai ou tu mens", et effectivement, c'est ce qu'elle vous dit, mais sans que vous ne sachiez décider quel terme de l'alternative est satisfait.

- E. L. : Elle s'enchaîne parce que de la chaîne de la disjonction qui est ce premier enchaînement-là, se produit la vérité, la vérité s'enchaîne. Et puis il y a la vérité qui se déchaîne…

- C. E. : La vérité qui se déchaîne, c'est dans le premier dialogue, c'est que vous avez dit à la vérité qu'elle ne pouvait pas dire une chose et son contraire, et c'est ce qu'elle a pourtant fait.

- E. L. : Et la vérité se déchaîne au double sens du français "se déchaîner" : au sens de "faire éclater son pouvoir", elle fait éclater son pouvoir qui est précisément de dire A ou ¬A ; et au sens où elle rompt cet enchaînement qui l'arrête, elle vient arrêter la chaîne qui là pouvait tourner court autour de la vérité. Elle se déchaîne en révélant son pouvoir qui est de dire, de faire apparaître de façon apophantique à la fois une chose et son contraire.

- C. E. : Ce que je voudrais d'emblée souligner, c'est comment cette dissymétrie des deux dialogues nous place déjà en dehors de la logique classique, à savoir celle que l'on peut par exemple décrire avec des tables de vérité. Si on établit la table de vérité de chacune de ces deux propositions, $\neg(A \wedge \neg A)$ et puis $A \vee \neg A$, quelque soit la valeur de vérité de A, le résultat est toujours "vrai". Ce qui fait que ces deux propositions sont classiquement équivalentes.

Table de vérité

A	¬A	A∧¬A	¬ (A∧¬A)	A∨¬A
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V

Dans la logique intuitionniste, par contre, on s'intéresse à une autre notion de la vérité…

- E. L. : Tout le monde le voit : vous prenez les tables de vérité de la négation, de la conjonction et de la disjonction. En logique classique, que ce soit le terme A ou non-A, $A \vee \neg A$, si vous examinez la disjonction, ou bien, ou bien — ou bien A est vrai, ou bien non-A est vrai, que ce soit l'un ou l'autre, c'est vrai. Et c'est justement un point sur lequel les intuitionnistes se sont séparés de la logique classique, en disant que la valeur de vérité écrit là quelque chose sans vraiment informer sur ce qui est vrai, si c'est A ou non-A ; et c'est pourquoi dans le tableau de Lorenzen, dès que vous affirmez ça, vous devez vous engager et dire si c'est A ou non-A qui est vrai. Vous n'avez pas le droit de proposer un ensemble sans avoir construit rigoureusement les termes de l'alternative. C'est ce que visait globalement le travail de l'intuitionnisme : il soutenait qu'on ne peut poser un objet sans l'avoir construit — on ne peut poser un ensemble, un tout, si l'on n'en appréhende pas tous les éléments. D'où la difficulté que posent les ensembles infinis : on parle d'ensemble, mais tous les objets ne sont pas là. Déjà, simplement avec la disjonction, le problème se pose : peut-on parler de ce tout qui est vrai, que l'un ou l'autre soit vrai, sans spécifier quel objet on a construit, sans savoir si c'est A ou non-A qui est vrai. C'est donc effectivement un des enjeux de l'établissement des tableaux que de forcer l'autre à s'engager sur un des termes de l'alternative. On le voit en effet : que la thèse A soit vraie ou fausse, à chaque fois vous avez le vrai dans les quatre cases à droite de la table de vérité, alors que dans le tableau intuitionniste qu'a établi pour vous Christian Even, vous saisissez une dimension de dialogue, et non pas un "c'est écrit d'avance" : la vérité ne se donne pas dans le tableau intuitionniste, elle se refuse, et c'est pourquoi cela me sert à avancer dans les assertions.

Choix et effacement

- C. E. : Je vais rapidement commenter les règles de cette logique. Nous allons d'abord examiner le calcul des propositions. Quand on fait la présentation d'une logique, on commence toujours par là, ensuite on aborde le calcul des prédicats.

On note donc les propositions par une lettre, par exemple A, c'est ce qu'on appelle une variable propositionnelle, qui peut avoir le contenu sémantique que l'on veut, cela peut vouloir dire "2 est pair", ou "...impair", etc. Quels sont les connecteurs logiques qui permettent de construire des propositions plus compliquées ? Vous avez la négation, vous avez la disjonction. Pour la logique intuitionniste il faudra choisir le terme de l'alternative que l'on soutient. La conjonction c'est quand on soutient les deux, il n'y a pas de problème. Et puis vous avez un autre connecteur qui est l'implication[9].

Là, il ne se passe plus ce qui se passait dans la logique classique : on pouvait se limiter à deux connecteurs, ou même un seul, le connecteur de Schaeffer. Ici, il faut prendre les quatre; on ne peut plus définir les uns à partir des autres. On peut seulement éliminer la négation en disant qu'en fait, $\neg A$, c'est la même chose que $A \Rightarrow \perp$ (A implique faux). On peut considérer qu'une proposition est fausse, si cette proposition implique le faux; cela permet éventuellement d'être plus succinct dans l'écriture des règles.

Je rappelle donc l'idée, c'est qu'il y a O, l'opposant, et P, le proposant, et que P doit contrer toutes les objections de O.

Pour P, soutenir la *conjonction* de A et de B, revient à s'engager à soutenir effectivement A, et B : il y a un embranchement, il y a deux scénarios de poursuite du dialogue. Dans un premier dialogue P doit pouvoir soutenir A, et dans un deuxième dialogue, P doit pouvoir soutenir B.

- E. L. : C'est toujours la même idée que pour la disjonction, on ne laisse pas un tout s'organiser sans que chacun des atomes consti-

9 : $\neg$ *négation*
$\vee$ *disjonction*
$\wedge$ *conjonction*
$\perp$ *faux*
$\Rightarrow$ *implication*
$\neg A : A \Rightarrow \perp$ *(par définition)*
P : proposant
O : opposant.

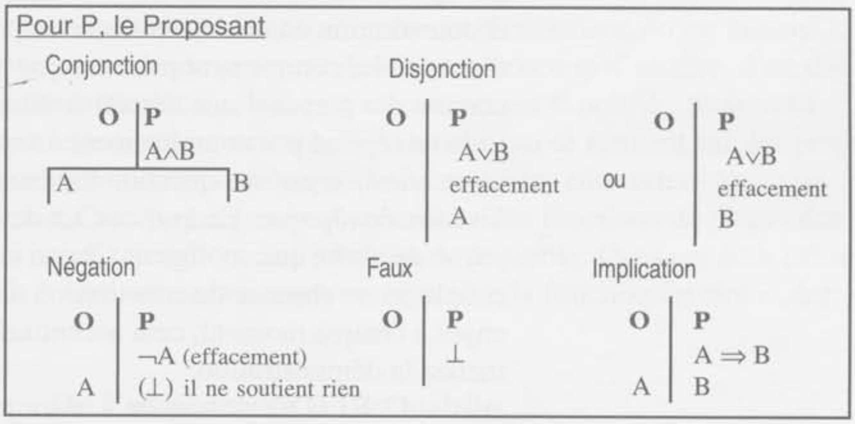
tuants du tout soit interrogé et soutenu comme thèse individuellement. Donc dès que vous avez ça, on décompose entre un élément ou une proposition atomique A et un élément ou une proposition atomique B. A et B s'écrivent à droite de la verticale, puisqu'elles sont soutenues par P.

- C. E. : Si P soutient la *disjonction* A∨B, il s'engage à dire quel terme de l'alternative il choisit de soutenir, donc il a deux possibilités. Ce qui se passe dans la logique intuitionniste, je le rappelle, c'est que le proposant ne peut plus maintenant se resservir de cette proposition A∨B, elle est effacée.

La *négation* : Si P soutient ¬A, c'est qu'il soutient qu'il peut contredire A, donc cela conduit O à soutenir A.

Le faux : soutenir le faux, c'est ne rien soutenir. Ce n'est pas forcément perdre, parce que le proposant a la ressource d'attaquer O sur ce qu'il a dit précédemment.

L'implication : pour le proposant soutenir A ⇒ B, c'est soutenir B si l'opposant soutient A ; et c'est pourquoi en fait cette implication, A ⇒ B, cela veut dire : "si vous me concédez A, alors je vous prouve B". C'est donc une implication effective.



En ce qui concerne O, l'opposant, les règles sont symétriques*.

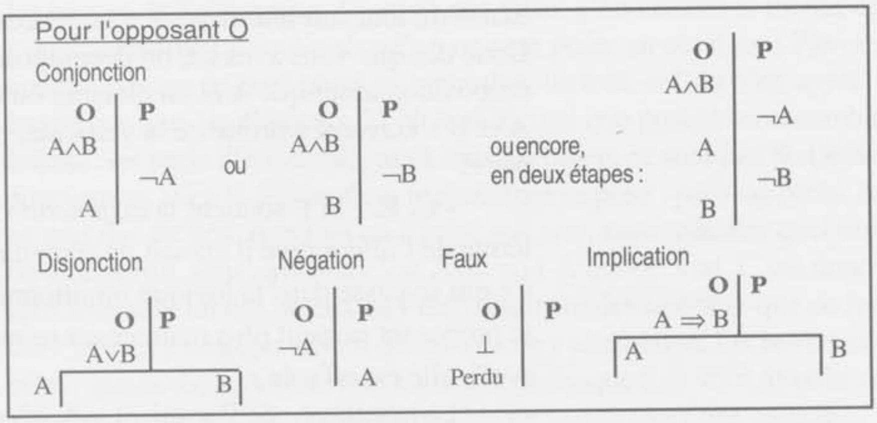
Si l'opposant soutient une *conjonction*, à ce moment-là, P peut lui imposer le terme de la conjonction qu'il doit soutenir, mais peut lui imposer l'un, puis l'autre, puisque rien ne s'efface de ce que O a dit auparavant.

Vous voyez la différence, c'est qu'on peut toujours se rappeler de ce que l'opposant a dit, on peut toujours aller interroger ce qu'il avait dit avant, tandis que si, pour le proposant, soutenir une proposition entraîne que celle qu'il avait dite avant s'efface, cela donne la logique intuitionniste. Si par contre elle ne s'efface pas, on a la logique classique. Donc dans un même cadre, on peut à la fois exprimer la logique classique et la logique intuitionniste.

- X. : Pourquoi faut-il que cela s'efface ?

- C. E. : On le voit dans la règle de la disjonction. Pour que ça ait un sens de dire "il faut choisir une alternative", il ne faut pas pou-

* *Voir le tableau page suivante.*



voir dire "je dis A, et puis ensuite, je vais aussi dire B, ainsi je n'aurai pas à choisir entre les termes de l'alternative". Le dit initial de la disjonction s'efface une fois le choix effectué. Il y a un moment pour faire un choix, et il faut le faire au moment opportun.

- E. L. : Par la suite on présentera même cela comme une suite de choix. Cela dégage dans l'écriture logique le choix de la thèse que l'on met en débat, et surtout une déconstruction du tout. L'effacement est un des modes de déconstruction du tout, c'est un des modes de déconstruction en cela que cela ne se présente jamais comme vue d'ensemble, comme synopsis, comme table de vérité, mais toujours comme des étapes d'une démonstration, qui déconstruisent le tout. Cela ne répond pas complètement à votre question sur l'effacement ; votre question est une question fondamentale qui peut trouver bien des niveaux de réponse. En tout cas, un des niveaux de réponse, c'est le terme de choix que soulignait Christian Even, qui est décisif, et est couplé à une absence de constitution d'une mémoire du tout : il y a un enjeu à chaque moment, cela accentue le choix de comment vous menez la démonstration.

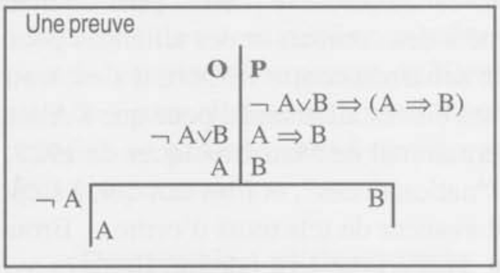
- C. E. : J'en étais donc à la conjonction pour l'opposant, je continue.

Pour la *disjonction* : l'opposant soutient A∨B, s'il soutient A dans une première suite du dialogue, et B dans une deuxième.

Pour la *négation* : même règle que pour P. Par contre si O est amené à soutenir le faux, là, il perd.

Pour *l'implication* : Soutenir que A implique B revient, pour l'opposant, à soutenir B si le proposant a soutenu A. Par contre, P le réfute s'il parvient dans une première suite du dialogue à soutenir A, et dans une autre à réfuter B.

On peut essayer de voir sur quelques dialogues comment ça fonctionne. Essayons par exemple de prouver la proposition $\neg A \vee B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$. Nous appliquons donc les règles : première étape, règle de l'implication, si l'opposant soutient $\neg A \vee B$, alors vous devez être en mesure de prouver $A \Rightarrow B$. Là, c'est encore une implication que soutient le proposant; donc P dit encore : "si tu soutiens A, je vais



soutenir B". Comme l'opposant avait soutenu une disjonction, P peut l'engager dans un scénario à soutenir ¬A, et dans un autre à soutenir B. Si O dit ¬A, P peut soutenir A qu'O soutient déjà ; donc O se contredit et cette branche du tableau est close. La seconde est close immédiatement, puisque si O dit B, il consent à ce que P voulait soutenir.

- E. L. : C'est une démonstration qui permet d'élaguer ce foisonnement de foncteurs ou de connecteurs, et de ne jouer qu'avec des fonctions déclaratives et des propositions atomiques. Vous voyez donc — ou vous ne voyez pas mais petit à petit vous verrez — comment l'avantage de ces modèles de tableaux tient à ce qu'avec une simple fonction d'adresse à la vérité, avec cette écriture apparemment dialoguante, on fait s'évanouir les foncteurs, ou les connecteurs, ou les opérateurs, pour ramener aux propositions atomiques. Et il est assez beau de voir comment ce qui normalement en logique classique apparaît comme des enchaînements, au contraire, avec cette écriture, ce sont les articulations qui sont soulignées, et, finalement, on est ramené à un seul : à cette seule structure de tableau, structure d'un dire, d'un dire à la vérité. Bien sûr, ce qui est présenté ici est simplifié ; mais vous voyez comment on arrive à des tableaux qui se ferment sur des propositions atomiques, sur des propositions toutes connectées à un dire central. Disons que ça sépare assez bien les fonctions du dire et des dits ; et ce, en dehors de l'intuition de la parole. Dans cet écrit même, dans l'écrit même, vous voyez apparaître la fonction du dire et des dits.

De l'effacement à l'ex-nihilo, le sujet et le Dieu obscur

- C. E. : On verra un peu plus tard d'autres démonstrations. Ce que je voudrais faire remarquer, c'est que le point de départ de cette logique était précisément la critique, par un mathématicien qui s'appelait Brouwer, de cet axiome qui affirme le tiers exclu, A∨¬A, formule que Lacan associe au paradoxe du menteur : "ou tu dis vrai, ou bien tu mens". On s'est rendu compte que cet axiome est équivalent au principe dit du raisonnement par l'absurde, qui comporte que s'il y a une proposition qui n'est pas fausse, alors elle est vraie. Et Brouwer a fait suffisamment de remarques sur les démonstrations qui utilisaient cet axiome, pour suggérer qu'effectivement ce principe du tiers exclu ne devait pas être admis tel quel dans les mathématiques ; pour lui, c'était dans la ligne de sa théorie philosophique du sujet créatif en mathématiques, et c'est contemporain d'une crise pendant laquelle il s'est disputé le leadership des mathématiques avec Hilbert. Brouwer était assez fanatique, il se prenait pour un homme providentiel, et cela l'a mené à des combats et des alliances pour le moins douteux. Dans sa lutte acharnée contre Hilbert, il s'est trouvé associé à Bieberbach, l'un de ses élèves allemands, pour que l'Allemagne boycotte le Congrès International de Mathématiques de 1928. Ce boycott était appelé par les "nationalistes", et l'on sait qui, à l'époque et en Allemagne, pouvait avancer de tels mots d'ordre… Brouwer et Bieberbach échouèrent, Hilbert put se rendre au Congrès avec une importante délégation. Il les évincera de façon décisive des instances mathématiques mondiales. Bieberbach s'inscrira au parti nazi en 1933, et entreprendra de conférer à la théorie intuitionniste une signification politique, en en faisant une "mathématique aryenne"[10].

Mais il faut rappeler que les meilleurs élèves de Brouwer ne suivirent pas cette pente, et que Heyting, Gentzen, et plus tard Lorenzen donneront à l'argumentation brouwerienne une formalisation épurée, loin de ces dérives.

- E. L. : Alors rassurons tout le monde, la logique intuitionniste n'est pas une logique nazie. On peut d'ailleurs s'étonner que des modes de déconstruction du tout puissent précipiter quelqu'un dans l'ignominie nazie. Mais à sacraliser l'acte créatif, on peut être poussé vers le *ex nihilo*, version sacrifice. Il faut faire attention à la création *ex nihilo*. Il y a la bonne, celle qu'explique la vraie religion, et puis il y a la mauvaise, c'est le nihilisme, justement. Alors il faut faire attention. Le sujet de la démocratie peut à l'occasion se fourvoyer, c'est ce qui fait qu'on ne peut pas laisser complètement les choses suivre leur cours. Mais c'est très frappant : Brouwer s'est compromis dans cette voie, Hilbert pas du tout.

Cela dit, Gentzen et Heyting sont en fait des constructivistes qui ont poursuivi l'école d'Hilbert. L'opposition Brouwer-Hilbert est une opposition compliquée ; comme le rappelait le logicien Jean-Yves Girard, tous deux sont quand même des constructivistes.

- C. E. : Hilbert a formulé son fameux programme en tenant compte des critiques de Brouwer et des intuitionnistes.

- E. L. : Cela jouait sur les questions de l'infini, de la maîtrise du tout, et de la négation : peut-on dire que l'on connaisse vraiment le tout, et pourquoi la double négation ne ramène-t-elle pas à l'affirmation ? Lacan a parlé tardivement de la logique intuitionniste, mais vous pensez bien que ce genre de problèmes l'a fasciné depuis toujours : qu'est-ce qui fait que dire "non, ce n'est pas ma mère" n'est pas tout à fait équivalent à dire "Maman" ? Quand on sait qu'il y a des petites merveilles comme ça en logique, il est tentant de s'y référer pour décrire la structure de l'inconscient. Et il ne faut pas simplement s'arrêter à l'idée : "l'inconscient n'est pas logique puisqu'il peut soutenir une chose et son contraire", il s'agit de voir comment il peut le faire. Lacan s'est intéressé à la logique intuitionniste, et il s'est intéressé à son opposé, aux groupes de Klein — pas Mme Klein, le

10 Cf *à ce sujet l'article de Herbert Mertens, « Mathématiques et national-socialisme: le cas Bieberbach »*, Revue des Deux mondes, *février 1995, Paris,, pp. 65-76.*

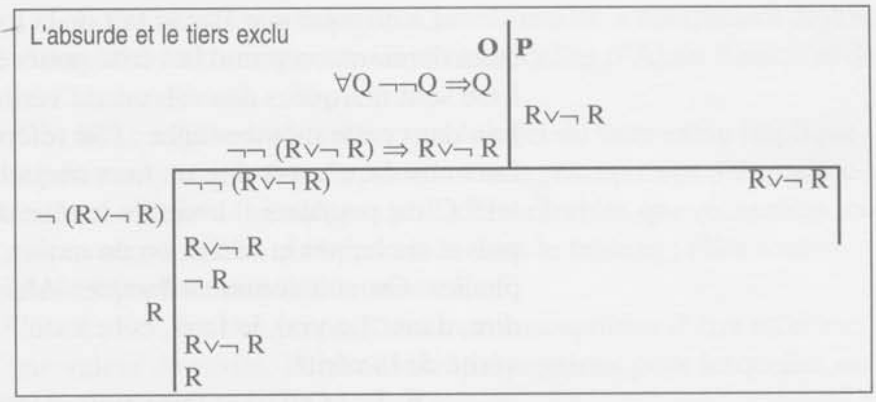
mathématicien Félix Klein. Dans les groupes de Klein, la répétition d'une opération vous ramène au même : l'inverse de l'inverse de 3, c'est 3. Nous avons le groupe de Klein d'un côté, la logique intuitionniste de l'autre. Il faudrait examiner ces différents systèmes. Mais peut-être en parlerez-vous à un autre moment ; continuez donc ce que vous nous démontrez.

Dénégation et tiers exclu

- C. E. : Comment est-ce qu'un axiome intervient dans cette présentation de la logique par les diagrammes, les dialogues de Lorenzen ? Réponse: un axiome, c'est un dit préalable de l'opposant. Supposons qu'on adopte pour axiome : "Pour toute proposition Q, on a $\neg\neg Q$ implique Q [$\forall Q\ \neg\neg Q \Rightarrow Q$]". Cela veut dire qu'O l'a dit, quelle que soit la proposition Q, et que par conséquent P peut s'y référer.

Mon but est d'expliquer que le raisonnement par l'absurde implique le tiers exclu. Il s'agit en fait de démontrer l'implication $(\neg\neg R \Rightarrow R) \Rightarrow R \vee \neg R$.

La proposition Q que le proposant va alléguer, ça va être $R\vee\neg R$, justement. L'opposant a eu en particulier ce dit préalable :



$\neg\neg(R\vee\neg R)\Rightarrow(R\vee\neg R)$. Si l'opposant a dit ça, on va pouvoir démontrer $R\vee\neg R$. Puisqu'il soutient une implication, le proposant doit soutenir dans un scénario de dialogue la prémisse qui est là, $\neg\neg(R\vee\neg R)$, et réfuter $R\vee\neg R$ dans un autre. Cette dernière branche de dialogue est immédiatement close, puisqu'ici, on a la même formule des deux côtés. Donc il ne reste plus qu'à clore la branche de gauche du dialogue.

Puisque c'est une double négation, cela passe du côté de O en devenant $\neg(R\vee\neg R)$. Donc le Proposant peut arriver à dire $R\vee\neg R$ et peut choisir par exemple $\neg R$ comme alternative, faire dire R à l'opposant. Et là il peut se référer à nouveau au dit de O : "tu avais dit cela $\neg(R\vee\neg R)$, eh bien je recommence, je suis fondé à réécrire cette formule-là, $R\vee\neg R$, et cette fois-ci je choisis l'autre terme de l'alternative, je vais choisir R." Et cela clôt cette deuxième branche du tableau.

Vous voyez donc que le principe du raisonnement par l'absurde implique celui du tiers exclu. Je vous laisse en exercice, si vous le voulez, de démontrer la réciproque.

Cela n'est pas sans évoquer un passage de la *Verneinung*, où ce que Freud nous dit se laisse retraduire en ceci que, dans la psychanalyse, on ne peut pas admettre ce principe :

> "Un contenu refoulé de représentation et de pensée peut percer jusqu'à la conscience, à condition qu'il s'y laisse dénier, c'est le "Ce n'est pas ma mère". La dénégation est une façon de prendre connaissance du refoulé ; elle est à proprement parler déjà une levée du refoulement, mais certes pas une acceptation du refoulé. On voit comment ici la fonction intellectuelle se sépare du processus affectif. À l'aide de la dénégation n'est levée que l'une des conséquences du processus du refoulement, celle qui consiste à ce que son contenu de représentation parvienne à la conscience. Il en résulte une sorte d'acceptation intellectuelle du refoulé, alors que du refoulement persiste l'essentiel. Au cours du travail analytique, nous créons souvent une autre modification très importante et singulièrement troublante de la conscience, nous réussissons à vaincre la dénégation elle aussi et à obtenir la pleine acceptation intellectuelle du refoulé. Le processus même de refoulement, par là, n'est pas encore levé."[11]

On voit donc qu'une double négation, finalement, peut ne pas faire une affirmation.

La critique que Lacan fait de la logique classique est que dans cette dernière, on prend la vérité pour référence. Les propositions de base sont marquées des valeurs de vérité V / F. Or Lacan nous dit plus loin dans cette même séance : "Se référer à la vérité, c'est poser le faux absolu, c'est-à-dire un faux auquel on pourrait se référer comme tel." C'est pourquoi il assimile le rêve de la liberté au rêve qu'on puisse enchaîner la vérité, ou du moins, comme il dit, apprivoiser le phallus. On voit comment Jacques-Alain Miller a pu être amené à dire, dans "Le vrai, le faux, et le reste"[12], que l'impuissance est la vérité de la vérité.

- E. L. : Oui, il le fait valoir. Alors au fond, on voit : ce que vous mettez de votre cru, c'est — vous dites que le faux absolu, c'est l'enchaînement de la vérité ; que le véritable enchaînement de la vérité, c'est un faux qui échapperait à ce type d'enchaînement-là, un faux absolu, séparé d'un "ou bien ceci, ou bien cela", le faux tout seul. C'est original, c'est une idée étrange, "se référer à la vérité, c'est poser le faux absolu".

- C. E. : Oui, tout l'accent est sur "se référer". Cela permet de comprendre aussi ce que Lacan avait dit plus tôt dans le séminaire "D'un discours qui ne serait pas du semblant" :

> "L'interprétation n'est pas mise à l'épreuve d'une vérité qui se trancherait par oui ou non, elle déchaîne la vérité comme telle, elle n'est vraie qu'en tant que vraiment suivie."[13]

- E. L. : Ça, c'est vraiment une chose de dire : une interprétation ce n'est pas une proposition P qui pourrait entrer, justement, dans des

11 S. Freud, "La dénégation", Trad. P. Thèves et B. This, in Document de travail du Coq Héron, *N° 8, 1982.*

12 J. A. Miller, "Le vrai, le faux et le reste", La Cause freudienne *N° 28, ECF-ACF, Diffusion Seuil, Paris, 1994, p. 10.*

13 J. Lacan, "D'un discours...", op. cit., *séance du 13 janvier 1971.*

tables de vérité, qui serait susceptible d'avoir la valeur "vrai" ou "faux" ; on ne formule pas les interprétations suivant le critère de l'exactitude : "votre mère a sûrement été dépressive entre le moment de votre naissance et sans doute vos trois ans et demi, jusqu'à la naissance de votre frère" — oui, d'accord ; c'est une construction, on fait ça dans les contrôles, on calcule tout cela, et puis après on fait comme on peut avec les dits du patient, qui brutalement vous parle de compères, du camarade, de l'autre, de façon telle que vous pouvez faire apparaître l'équivoque de ce qu'il dit ; une fois que vous avez fait apparaître l'équivoque, vous déchaînez la vérité comme telle, c'est-à-dire le fait que cela puisse être vrai ou faux ; c'est ou vrai, ou faux, mais c'est là que vous faites apparaître l'enchaînement de la vérité. Et au fond, on voit deux usages, si l'on veut, de la vérité, un usage où l'on pose le faux absolu comme référence, et où l'on traque la vérité ; et un usage qui vise à déchaîner la vérité comme telle, où elle n'est vraie qu'en tant que suivie, qu'en tant qu'elle vous entraîne derrière elle, elle vous fait suivre. Par exemple, brutalement, en un éclair, vous apercevez ce qui n'apparaissait pas jusque là, la place, dans tel souvenir, du sourire de la mère qui semblait anodin et qui soudain surgit comme la trace du fait qu'à ce moment-là, elle était complètement perdue ; et à partir de là se reforme un fait, comme dirait Freud.

- C. E. : Ce lien à la logique intuitionniste a notamment déjà été noté dans des lectures récentes de Lacan, celles d'Alain Badiou et de Jean-Claude Milner...

- E. L. : Quand vous dites que le rejet du tiers exclu implique précisément qu'il y a des propositions non susceptibles d'être affectées d'une valeur de vérité, pas plus démontrables que récusables, ce n'est pas tout à fait ce qui apparaît là dans le tableau ; elles sont enchaînables dans une démonstration.

- C. E. : Par des propositions non susceptibles d'être affectées d'une valeur de vérité, j'entends des propositions pour lesquelles on ne peut démontrer ni A, ni $\neg A$.

- E. L. : Le raisonnement par l'absurde est solidaire du tiers exclu. Mais l'essentiel, c'est qu'il y a des propositions qui ont l'air formées correctement alors qu'en fait on ne peut démontrer aucun terme de l'alternative. La disjonction n'est pas recevable si on ne peut pas construire soit l'un, soit l'autre ; alors en effet, ça donne ceci : "il y a des propositions non susceptibles d'être affectées d'une valeur de vérité, non plus démontrables que réfutables". Voilà en quoi des phénomènes de logique intuitionniste se ramènent à ce qu'habituellement nous formulons avec le théorème de Gödel ; c'est ainsi qu'il y a des propositions vraies qui ne sont pas démontrables. Là, on voit — enfin, on ne voit pas tout à fait, mais on pourrait voir — qu'avec d'autres biais, on fait surgir le même type de problèmes.

- C. E. : Montrer que quelque chose ne peut pas se montrer, ce n'est évidemment pas la même chose que de le montrer, c'est un autre problème, beaucoup plus difficile, dont la résolution fait appel à d'autres choses. Une des voies des mathématiques est de recourir à des "modèles".

Le savoir de l'indécidable

Venons-en maintenant au calcul des prédicats et aux quantificateurs, où on va retrouver le même phénomène que pour la disjonction.

Si le proposant soutient une *existentielle* telle que $\exists x\, F(x)$[14], "il existe un x tel que $F(x)$", il doit dire de quel x, précisément il s'agit — comme pour la disjonction. Il doit produire, par exemple, l'objet c qui satisfait F, et soutenir $F(c)$. C'est une alternative, comme la disjonction, mais qui peut porter sur un ensemble infini d'objets.

O	P	O	P
	$\exists x\, F(x)$	$\exists x\, F(x)$	
	$F(c)$	$F(y)$	

L'opposant, lui, s'il soutient l'existentielle, choisit un objet quelconque, un nom qui n'a pas figuré auparavant dans le dialogue.

Continuons avec les *universelles* : soutenir l'universelle $\forall x\, F(x)$, cela veut dire que si l'autre vous propose un certain objet, vous devez être en mesure de soutenir que le prédicat F est satisfait par cet objet. L'opposant, propose toujours un objet y, un objet nouveau ; il faut alors au proposant soutenir $F(y)$, y étant un nom inédit.

O	P	O	P
	$\forall x\, F(x)$	$\forall x\, F(x)$	
	$F(y)$	$F(c)$	

- E. L. : Ce sont des quanteurs qui sont soutenus strictement à partir de noms, c'est-à-dire d'individus nommables ; le quanteur est envisagé non pas à partir de constitution d'un tout : "il existe ceci", ou bien "dans un domaine de variables, etc.". Donc, vous ne vous engagez que sur des noms ; c'est-à-dire que pour l'opposant, il fait valoir l'objet nouveau, le nom qui n'était pas encore le nom du proposant, et le proposant, lui, doit pouvoir s'engager. S'il dit : c'est ainsi pour tous, si on lui sort un nouveau nom, eh bien il faut qu'il le soutienne, et qu'il dise : "en effet, il en fait partie". C'est toujours la même tentative de ne s'engager qu'à partir de ces entités minimales, ce qui fait qu'en un sens, c'est un nominalisme ; en un sens, Brouwer parlait au nom du rasoir d'Occam : ne pas considérer, on le verra, que toutes les classes doivent être admises, voilà où il veut nous amener.

- C. E. : Je continue. Pour l'opposant, soutenir l'universelle $\forall x\, F(x)$, c'est soutenir $F(c)$ à chaque fois que le proposant avance un objet c. Avec ces règles, on peut voir que s'il en existe un "tel que non", c'est-à-dire s'il y a une exception, alors "c'est : pas pour tous" : on peut démontrer l'implication $\exists x \neg F(x) \Rightarrow \neg \forall x\, F(x)$.

Cette fois-ci, on peut tout de suite faire dire à l'opposant $\exists x\, \neg F(x)$. Puis il faut l'interroger sur cette existence : lequel est-ce? Il dit : $\neg F(y)$; puisque, pour l'opposant, soutenir une existentielle, c'est choisir l'objet.

14 $F(x)$ est une fonction propositionnelle : c'est une proposition dont la valeur dépend de l'objet qui vient se ranger à la place de la variable x. Par exemple, si F= Noir ; on a Noir(Un corbeau), mais ¬ Noir(Blanche Neige).

O	P
	$\exists x\ \neg F(x) \Rightarrow \neg\ \forall x\ F(x)$
$\exists x\ \neg F(x)$	$\neg\ \forall x\ F(x)$
$\neg F(y)$	
	$F(y)$
$\forall x\ F(x)$	
$F(y)$	

- E. L. : Il faut qu'il y en ait un, il faut qu'il y ait un objet.

- C. E. : Le proposant peut ainsi soutenir $F(y)$. Mais comme l'opposant a contredit $\neg\forall x\ F(x)$, il peut lui être maintenant demandé de soutenir l'universelle $\forall x\ F(x)$, on va lui dire : "oui, mais pour cet y dont il a été question, il faut aussi que tu puisses soutenir $F(y)$", c'est la règle de l'universelle, ce qui clôt le tableau.

En ce qui concerne la réciproque $\neg\forall x\ F(x) \Rightarrow \exists x \neg F(x)$, on ne peut que s'essayer en vain à la démontrer, car elle est indécidable.

- E. L. : La négation de l'universelle n'implique pas l'existentielle, alors que dans l'autre sens, cela se démontre. C'est une des grandes dissymétries que Lacan souligne dans *Encore*. Et la construction des formules de la sexuation le prend en compte : elle ne répond pas aux règles de la logique classique, mais pour une part suppose un passage par la logique intuitionniste.

- C. E. : Cela peut nous permettre de comprendre en partie le tableau que Lacan construit dans "Le savoir du psychanalyste"[15], qualifiant la relation des deux formules de la sexuation côté homme de contradictoire et côté femme d'indécidable.

Donc, à gauche, les deux premières formules sont liées par une contradiction, ce qui se comprend par le fait que vous pouvez démontrer la négation de la conjonction des deux formules : $\exists x \neg F(x)$ et $\forall x\ F(x)$. Par contre, et voilà un exemple d'indécidable, il n'est pas possible de démontrer la conjonction des deux formules côté femme, non plus que sa négation. Pour cela, Lacan, dans "Le savoir du psychanalyste", écrit justement "indécidable" à droite, et à gauche, il écrit "contradictoire".

H	F
$\exists x\ \neg\Phi(x)$	$\neg\ \exists x\ \neg\Phi(x)$
Contradictoire $\updownarrow$	$\updownarrow$ Indécidable
$\forall x\ \Phi(x)$	$\neg\ \forall x\ \Phi(x)$

- E. L. : Le savoir du psychanalyste, c'est un savoir sur ce que l'on peut démontrer de la vérité. C'est un savoir, que de savoir si c'est indécidable ; c'est un savoir que de savoir si c'est une contradiction. Et c'est un savoir qui porte sur quoi ? Sur la possibilité ou pas d'être démontré, sur cette adresse à la vérité. C'est là où se connectent la logique modale — les modalités — et le savoir sur la vérité. L'expression "le savoir sur la vérité", c'est une façon de mettre en jeu cette vérité : ou bien mise en tables comme les tables de vérité, ou bien enchaînée dans ces chaînes démonstratives qui font apparaître un certain nombre de savoirs de type contradiction, indécidable, impossible, qui sont, ces chaînes démonstratives, des modalités de savoir obtenues sur la vérité. On ne se contente pas simplement d'appliquer la valeur de vérité, ou de calculer la valeur de vérité, et c'est cela le savoir du

15 J. Lacan, "Le savoir du psychanalyste ", inédit, séance du 1er juin 1972.

psychanalyste. En effet c'est très utile de rapprocher comme vous le faites ces séminaires, puisqu'il y a des choses qu'il a dites à un séminaire et qu'il n'a pas dites à son cours, et comme la séance de Sainte-Anne était entre temps, il continuait à l'expliquer à Sainte-Anne avec un public qui n'avait pas toujours suivi le cours et qui ne comprenait pas vraiment d'où tout cela venait, ce qui fait que dans le cours lui-même, "D'un discours qui ne serait pas du semblant", il y a des questions dont on trouve les réponses dans "Le Savoir du psychanalyste" ; il faut lire les deux en même temps.

Il est six heures, on peut peut-être en rester là dessus, vous continuerez la prochaine fois ?

- C. E. : Si vous voulez je pourrai donner la deuxième partie de mon exposé, sur les paradoxes.

- E. L. : Je vous remercie. ■

II - Aporie de la logique des prédicats

*Christian Even et Éric Laurent**

Eric Laurent : Christian Even va nous donner la deuxième partie de son exposé, "Dans la logique des prédicats, ce qui fait le non-prédicatif". Je vous laisse la parole.

Christian Even : Je vais maintenant aborder les problèmes de consistance et certains paradoxes qui sont apparus dans la logique moderne. Vous savez sans doute que l'un des initiateurs les plus importants de la logique moderne était Gottlob Frege. Son projet était de donner un fondement purement logique à l'arithmétique. L'arithmétique considère les nombres entiers $\{0, 1, 2, \ldots\}$ et les opérations d'addition et de multiplication. Il voulait donc lui donner un fondement purement logique parce que c'est la base à partir de laquelle il voulait aussi fonder logiquement toutes les mathématiques de manière à assurer qu'on n'y rencontre pas de contradictions, et cela en se fondant seulement sur quelques principes élémentaires. Il reprenait par là un projet plus ancien, celui de Leibniz.

Le terme de consistance, dans le langage de la logique, est un terme, je crois, qui vient en partie de l'anglais; en fait, en anglais, "*consistent*", cela veut dire "cohérent". C'est cela que ça veut dire, "consistant", cela veut dire qu'on ne rencontre pas de contradiction.

En fait Frege a dû abandonner ce projet à la suite d'une contradiction que Russell a pointée dans le système qu'il avait élaboré — c'est le fameux paradoxe de Russell, sur lequel je vais revenir par la suite. En fait ce n'était pas vraiment le premier paradoxe rencontré dans l'élaboration des fondements logiques des mathématiques. Le premier fut rencontré par Cantor ; mais je passe là dessus, parce que Russell a montré que tous ces paradoxes relevaient d'une même famille.

** Seconde de deux leçons du Cours 1995/96 d'Éric Laurent à la Section Clinique de Paris, "L'interprétation lave-t-elle de la faute ?", données les 22 mai et 5 juin 1996. La leçon précédente est publiée ci-avant dans ce numéro de* Cahier.

Ces paradoxes ont été surmontés, je vais y revenir plus tard, et ça a donné ce qu'on appelle la théorie des ensembles. D'un autre côté, on a donné de l'arithmétique une axiomatisation qui a paru satisfaisante, naturelle, c'est celle de Peano. Mais avoir une preuve de non-contradiction — que dans un univers on puisse se promener sans rencontrer de contradiction —, eh bien finalement, cela n'a pas été obtenu. Et justement, c'est là dessus que Hilbert est arrivé avec son programme pour une mathématique du vingtième siècle. Un point en était de trouver un cadre axiomatique dont on pourrait faire la preuve qu'il est non-contradictoire, et ceci par des moyens finitaires, c'est-à-dire avec des raisonnements qui n'impliquent pas plus, justement, que l'arithmétique, donc des raisonnements sur les nombres entiers. C'est ainsi qu'Hilbert s'est intéressé à la théorie de la démonstration, et s'est illustré notamment pour y avoir ouvert des voies, tenté de voir comment on pourrait obtenir cette preuve de non-contradiction. Et c'est là que ce point reprend la question de la consistance — c'est ce que j'ai écrit la dernière fois $\neg(A \wedge \neg A)$: peut-on démontrer qu'on ne peut pas avoir A et $\neg A$? La consistance, c'est montrer qu'on n'a pas inconsistance $[A \wedge \neg A]$.

La dernière fois, je vous ai montré ce qu'était une démonstration. On a un nombre de règles finies et on les applique un nombre fini de fois, et on obtient ainsi une démonstration; c'est ainsi que l'on peut faire une arithmétique des démonstrations.

Hilbert pensait également qu'on pouvait donner une batterie finie d'axiomes tels que tout problème mathématique puisse y trouver sa formulation et sa solution. C'est demander plus que la consistance, $\neg (A \wedge \neg A)$, c'est, d'une certaine manière, la complétude : pourrait-on démontrer soit A, soit $\neg A$, $A \vee \neg A$, pour tout problème A qui pourrait se poser.

C'est là que Gödel est arrivé avec ses théorèmes qui ont ruiné le projet hilbertien. L'idée de Gödel c'est, partant de cette distinction entre le métalangage, c'est-à-dire justement les démonstrations, et le langage objet, c'est-à-dire l'arithmétique, d'attaquer le fondement du programme de Hilbert. On peut faire un va-et-vient entre ces niveaux, démonstration et arithmétique : puisque les démonstrations, finalement, ne sont pas plus compliquées que l'arithmétique, on peut les coder dans l'arithmétique elle-même. Cela revient à coder le métalangage dans le langage-objet. Même si le codage et la démonstration sont plutôt compliqués, le principe en est simple : une démonstration, cela devient une relation arithmétique.

Qu'a-t-il démontré ? Il a construit une formule qui reproduit le paradoxe du menteur et qui dit : "je ne suis pas démontrable", en sorte que déjà, ça ruinait tout espoir de complétude, ce qui faisait le premier point du programme de Hilbert. Et dans un deuxième temps — c'est le second théorème d'incomplétude —, il a montré qu'on ne pourrait pas non plus obtenir une preuve de consistance de l'arithmétique; c'est-à-dire qu'on a l'échec du second point : on ne pourra pas prouver que l'arithmétique de Peano est consistante par les moyens de l'arithmétique elle-même — puisque tout le raisonnement est bâti sur cette arithmétique-là, celle de Peano.

Finalement, on a quand même obtenu des preuves de consistance, de non-contradiction, mais il faut faire appel à des systèmes plus forts, avec des hypothèses plus fortes, et donc plus douteuses. Le système ne trouve plus en lui-même sa consistance, il la reçoit d'un autre, lui-même plus douteux.

Intension/Extension, Réalisme/Nominalisme

A partir de là, je vais revenir sur les paradoxes de Russell.

Le paradoxe de Russell s'était inscrit dans le système de Frege. Frege pensait qu'à un prédicat f(x) on pouvait toujours associer une entité {x, f(x)} qui correspondrait à l'extension, la classe des éléments qui vérifient ce prédicat. f(x) c'est l'intension (ou encore la compréhension), {x, f(x)} c'est l'extension, ce qui reprend le partage effectué par Frege entre *Sinn* et *Bedeutung*.

f(x)		{x, f(x)}
Intension	$\longleftrightarrow$	Extension
Sinn		*Bedeutung*

- E. L. : Vous voyez à quel point le sens que nous donnons à ces termes, quand nous parlons de "psychanalyse en intension" ou "en extension", peut s'être éloigné de celui des logiciens. Nous disons, par exemple, que l'intension, c'est la passe, la définition du psychanalyste, et que l'extension, c'est l'extension du discours. Nous savons pourtant que "Le Psychanalyste", ça n'existe pas, qu'il n'y a pas de définition en intension du prédicat "Psychanalyste". C'est par l'*extension* de la passe, c'est-à-dire les A.E. pris un par un, que nous tentons d'en savoir plus sur l'intension qui n'est pas. Le fait que Lacan a, une seule fois dans un texte, utilisé le terme de "psychanalyse en intension" pour désigner la recherche du prédicat, ça a fait basculer l'usage des termes d'extension et intension, chez nous.

- C. E. : Dans "La Logique du fantasme", Lacan disait que c'était une fausse opposition et que du point de vue de la logique, on n'avait jamais progressé que du point de vue de l'extension.

- E. L. : Au sens plein, c'est ce que cela veut dire : ce qu'il dit dans "La Logique du fantasme" est beaucoup plus juste, mais ce qui est passé dans notre communauté, c'est l'usage débridé et qui du coup fait langue de bois. Et on répète : la psychanalyse en intension, la psychanalyse en extension ; alors qu'il vaut mieux dire, comme Lacan le fait dans *L'Envers de la psychanalyse* : il y a d'une part l'extension des discours, la transmission des discours, et de l'autre il y a les problèmes d'intension et d'extension, avec l'idée que c'est une fausse opposition, l'essentiel étant qu'on ne met pas l'accent sur la définition abstraite, sur l'essence, sur la fonction prédicative, mais sur l'extension de la classe. Cela a tout son intérêt puisque dès "La Logique du fantasme" apparaissent, et vous en avez très bien parlé, des réflexions sur l'intension et l'extension, qui vont aboutir dans *Encore* et dans le passage que vous étudiez à mettre l'accent sur l'extension. C'est très important de voir que l'extension d'une classe, ce sont les éléments qui obéissent au prédicat et leur recensement. C'est une incidente dans ce développement.

- C. E. : On peut ici évoquer l'opposition entre réalisme et nominalisme — les réalistes disent : cela existe, cette extension, pour tout prédicat, et les nominalistes diraient : non, c'est une façon de parler. Justement, là, il y a une relecture de ces positions à partir de la logique.

- E. L. : Par exemple le très intéressant petit ouvrage de Putnam sur la logique[1] traite de cette opposition nominalisme / réalisme, il la complique, et il note que certains croient que la logique porte soit sur les propositions, soit sur les classes. Lui-même se range dans la catégorie de ceux qui pensent que la logique ne porte pas sur les classes, et que pour des énoncés de type "pour tout x, si f est n et n est p, alors f est p", dès qu'il y a implication, celle-ci porte nécessairement sur des propositions et non pas sur des classes. C'est en effet décisif de le savoir lorsque nous avons à la bouche la logique de la psychanalyse, etc. Quand on voit que dans la logique il y a de grands événements du type: il y a des nominalistes, il y a des réalistes, personne ne gagne, et c'est comme ça depuis 3000 ans, c'est important d'avoir en tête qu'il y a des problèmes qu'on approfondit toujours et qui n'ont pas de solution à proprement parler. Ils s'approfondissent, et on approfondit les conséquences qu'a l'opposition. Mais ça n'a pas disparu, on aura toujours la querelle des universaux, et heureusement. Eh bien dans la psychanalyse, il y a des nominalistes et des réalistes, et en particulier il y a un nominalisme et un réalisme sur la jouissance. Jusqu'où cela va-t-il ? Que recouvrent "la classe des hommes" ou "la classe des femmes" ? Que signifient les propositions "la classe des femmes n'existe pas", ou "la femme n'existe pas" ? Ces propositions-là, ça passe par ce type de petits problèmes sur nominalisme et réalisme, très nécessaires sur ces questions.

Russell : "Rien n'est tout"

- C. E. : Le paradoxe de Russell s'expose assez simplement. Il dit : on va choisir un prédicat particulier qui est celui-ci : $x \notin x$. Donc on va introduire l'ensemble B, la classe plus exactement…

- E. L. : Là, vous utilisez indifféremment classe ou ensemble ?

- C. E. : Oui ; là, ce n'était pas encore apparu clairement comme distinct.

- E. L. : On n'avait pas encore noté l'urgence de séparer les deux, et c'est pourquoi chez Russell, en général, il y a l'énoncé en termes de classes, et pourtant on dit : l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. Alors que ce sont des classes, et vous-même vous parlez dans un vocabulaire classiste, vous utilisez une lexicologie classiste, en termes de classes.

1 H. Putman, Philosophie de la logique, *Éditions de l'éclat, Combas, 1996.*

- C. E. : Alors où apparaît le paradoxe ? Comme la définition de B [B = {x, $x \notin x$}] entraîne que x appartient à B si et seulement si x n'appartient pas à x, tout le problème surgit si, pour x, on prend B lui-même. Parce que la logique des classes, c'était cela : c'était de dire qu'à nouveau, une classe peut être un élément qui figure comme x, c'est une nouvelle entité mathématique, donc elle peut aussi réaliser cette valeur-là. Une classe, c'est quelque chose qui à nouveau peut se présenter comme élément : à partir du moment où on la considère comme entité existentielle, alors c'est une valeur possible de cet x.
- E. L. : Cette logique des classes décompose les habitudes de considération du un et du tout. Vous avez l'extension des uns, mais le tout, la classe elle-même, si c'est un tout, alors on peut la considérer comme un un. Dès lors vous pouvez l'ajouter à l'extension des uns, puisque cette classe comprend tous les uns considérés de la bonne façon. Si vous avez un ensemble de uns constitué de la bonne manière, répondant au prédicat, eh bien, vous ne trouverez jamais dans ce tout quelque chose qui échappe au un commun, au x. C'est cela déjà qui aide à déconstruire la notion hiérarchique du rapport du un et du Tout. Tout cela travaille très profondément les notions hiérarchiques, théologiques, dogmatiques des rapports du un et du tout.

Par exemple quand Heidegger commente l'aphorisme d'Héraclite : "Zeus, l'éclair, gouverne le monde", il dit : il y a une façon hiérarchique de penser cela, une façon transcendante, c'est la façon dont la métaphysique a opéré : il y a le Un et puis il y a le multiple ; le Un gouverne le monde parce qu'il régit le multiple ; le multiple est dominé par le Un. Il y a le monde comme monde, et il y a les objets du monde, qui sont régis par le Un. Quand Héraclite dit : "Zeus, l'éclair, gouverne le monde", dit que le Un domine le multiple, que sous la diversité du monde il y a le Un ; et sans doute il y a autre chose, il dit : il y a une hiérarchie. Zeus commande ; en tant qu'il incarne le principe du Un, qu'il est le Dieu de tous les dieux, il commande le monde. Et tout le commentaire de Heidegger va contre : alors qu'on a toujours lu Héraclite comme ça avant lui, il inverse la lecture pour montrer que le Un est présent dans le monde. Il est dans le monde retranché au monde, il n'est pas dans le multiple du monde, et pourtant il est dans le monde, c'est-à-dire qu'il n'est pas transcendant. Ce n'est pas le Un là-haut, Dieu, inaccessible, etc., il est là dans le monde, et c'est le rapport du Logos et du monde ; et ce rapport fait que nous habitons le Logos, plus que le monde. Cela suppose que le Logos soit dans le monde, et non pas transcendant. Ce type de commentaire heideggerien fait que quelqu'un comme Rorty dit qu'au fond, il y a un côté pragmatique chez Heidegger, contre la transcendance. Rorty l'enrôle, il dit que c'est le côté bon américain de Heidegger, on est jeté dans l'ici-bas, il faut donc se débrouiller — pragmatique, on commence à discuter, discussion démocratique générale, pas moyen que le un retrouve sa position hiérarchique.

Cela c'est une position des rapports du un, du tout, une façon de compliquer la chose. Avec la logique des classes, vous retrouvez une façon de déconstruire ces rapports du un et du tout par ce type de petites écritures. Si la classe est un mode du un, alors vous pouvez l'inclure, et vous retrouvez donc l'écriture possible de la classe comme cela : $\{x, f(x)\}$. Et là commencent à surgir un certain nombre de paradoxes d'où après on se sort par une hiérarchie — vous allez discuter cela, la fameuse théorie des types qui rétablit la hiérarchie. Et justement, en énonçant "pas de métalangage", en énonçant la théorie de lalangue, Lacan sait pour toujours maintenir présent ce type de phénomène. Il n'y a pas moyen de sortir de là : le un est dans le monde, et il n'y a pas moyen de hiérarchiser le rapport à la jouissance par sublimation progressive ; c'est toujours là comme trouvé. C'est une incidente, pour que tout le monde puisse suivre.

- C. E. : Je reviens à notre contradiction : si donc je peux remplacer x par B, j'obtiens ceci : $x \in B \Leftrightarrow x \notin x$; et finalement, on n'arrive pas à situer l'ensemble B : s'il s'appartient à lui-même alors il ne s'appartient pas, s'il ne s'appartient pas, alors il s'appartient ; on a donc là cette contradiction : $B \in B \Leftrightarrow B \notin B \rightarrow$ contradiction.

$B = \{x, x \notin x\}$
$x \in B \Leftrightarrow x \notin x$
$B \in B \Leftrightarrow B \notin B \rightarrow$ contradiction

– C'est là que justement, dans la théorie des ensembles, il a fallu surmonter ce problème. Évidemment, on ne pouvait plus dire qu'on pouvait toujours former l'ensemble qui correspondrait à un prédicat. On pouvait simplement prendre un ensemble A. S'il est préalablement donné alors on peut prendre le sous-ensemble de A dont les éléments sont exactement ceux qui vérifient un certain prédicat. Autrement dit, si la totalité est donnée, on peut prendre le sous-ensemble dont les éléments vérifient un certain prédicat.

Que se passe-t-il alors ? On introduit cette fois-ci l'ensemble B, soit l'ensemble des x appartenant à A tels que x n'appartient pas à x : $B=\{x \in A, x \notin x\}$. On obtient donc x appartient à B implique x appartient à A et x n'appartient pas à x. A nouveau on peut se dire : que se passe-t-il si je prends B comme valeur possible de x ? Est-ce que B appartient ou non à A? La seule possibilité qui n'engendre pas de contradiction est que B n'appartient pas à A (ce qui entraîne que B n'appartient pas à B). En effet, si B appartient à A on retombe dans la contradiction précédente ($B \in B \Leftrightarrow B \notin B$); donc la seule possibilité de s'en sortir, c'est en posant que B n'appartient pas à A.

A
$B=\{x \in A, x \notin x\}$: les éléments de A qui ne s'appartiennent pas à eux-mêmes
$x \in B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \notin x$
$B \in B \Leftrightarrow B \in A$ et $B \notin B$
$B \notin A$

Ce qui a été modifié de l'hypothèse de départ dans la théorie des ensembles par rapport à celle des classes considérée par Frege, c'est qu'on ne peut prendre l'ensemble constitué des éléments qui vérifient tel prédicat, que si l'on part d'une totalité qui est donnée au préalable.

- E. L. : Là, au lieu de prendre La Totalité, on se donne *une* totalité, on en prend une partie, et on voit si on peut de cette partie éliminer ce type de problème. On peut en sélectionnant correctement les éléments dans une totalité, arriver à échapper au problème précédent.

- C. E. : On y arrive, donc ici la seule chose, c'est que les x sont pris dans A pour constituer le sous-ensemble B.

- E. L. : On essaie de trier les bons éléments et les mauvais, on essaie de chasser le problème, comme pour le suffrage censitaire : on prend les bons citoyens et les autres, on ne leur donne pas le droit de vote. Là, on cherche si on n'a pas le moyen de faire un bon tri tel qu'on protège tout le système du prédicat. Il y aurait des bons touts, à condition de trier les éléments qu'il y a dans le tout. On part du tout, on cherche là dedans s'il n'y aurait pas des éléments qui ne s'appartiennent pas à eux-mêmes ; mais en fait à ce moment-là, ça déconstruit A. Vous avez $B \in A$, et si vous faites les tris qui sont là, vous retrouvez le problème : pour ce que vous avez sorti comme partie, vous retrouvez le même paradoxe. Vous avez beau avoir voulu opérer un tri, vous trouvez à ce moment-là dans le bout que vous avez sorti la même chose : cela n'appartient pas.

- C. E. : Voilà. On peut regarder ce que cela fait : si on prend une totalité A, finalement, l'élément B, lui, est dehors. C'est cela que Russell exprime par ce raccourci : "rien n'est tout"[2]. Lacan reprend cela dans "La Logique du fantasme".

Lacan : incomplétude ou inconsistance de l'Autre

À ce propos, je voudrais reprendre l'argument de Lacan à propos de Russell. Lacan introduit lui aussi A — chez lui, c'est l'univers du discours —; et il considère un énoncé qui dit : "le signifiant ne peut pas se signifier lui-même".

- E. L. : L'important ici, c'est que si on dit : "le signifiant a un signifié", peut-on avoir un signifiant qui vienne à se signifier lui-même ? Le signifiant peut-il en venir à ce que par une série énumérable d'autres signifiants, on arrive à obtenir la signification d'un signifiant ? Le signifiant qui ne se signifie pas lui-même, ça peut s'écrire ou bien ainsi : $S \notin S$, ou bien ça peut s'écrire ainsi : va-t-on arriver à saturer la signification d'un signifiant ?

Jacques-Alain Miller développe cela : à partir d'un moment, Lacan considère de face le problème que pose le signifiant en ce qu'il régit les effets de signifié, mais n'arrive pas à boucler les effets de sens. Eh bien une des façons de le dire, c'est que le signifiant ne peut pas se signifier lui-même. Notre arithmétique de Peano à nous, nos éléments entiers, c'est le signifiant, S_1, S_2, S_3, etc. Est-ce qu'on arriverait à résorber un signifiant avec des signifiants, qui sont d'ailleurs indiciables de nombres entiers ? Lacan n'écrit pas S_e, il ne dit pas S_π, il ne prend pas des nombres réels pour indicer les signifiants, juste-

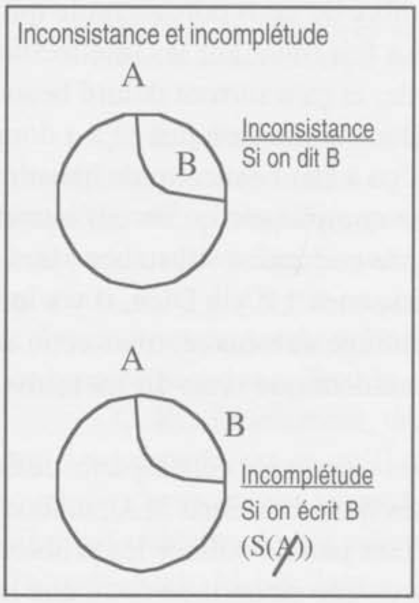
2 *B. Russell,* Signification et vérité, *Flammarion, Paris, 1990.*

ment ; il prend 1, 2, … *n* — c'est-à-dire une arithmétique ; ce n'est pas par hasard. Donc la question de notre arithmétique, ce serait : arrivera-t-on à rendre compte des effets de signifiant, et dans une cure analytique, pour un sujet, peut-on arriver à épuiser le signifiant à l'aide d'une série de signifiants ? Justement nous n'y arriverons pas, car rien n'est tout. Donc on ne pourra pas avoir le tout des signifiants. C'est toujours le type de mystère qui est lié à : comment se fait-il qu'après qu'on ait fait une analyse, on puisse parler encore ? Qu'est-ce qui fait qu'on n'est pas dégoûté de parler ? C'est mystérieux : mettez des analystes en face de quelqu'un qui veut bien les écouter, eh bien ils parlent, à l'occasion ils parlent trop. La source n'est pas tarie, ça ne s'épuise pas. Cela ne s'épuise pas, rien n'est tout, il y aura toujours du débordement, et il faudra un système plus puissant pour rendre compte de ce qui se passe. De même que l'arithmétique de Peano, c'est dans un système plus puissant que l'analyse trouve son fondement, qu'on a la preuve de sa consistance. Ce système plus puissant, qu'est-ce que c'est ? Eh bien le système plus puissant qui vient assurer la consistance du système du signifiant, c'est la façon dont l'objet *a* se situe, c'est la fonction de la cause, qui rend compte des paradoxes qui s'y produisent.

- C. E. : Là, on peut reprendre : donc A c'est l'univers du discours, B c'est l'énoncé que le signifiant ne peut pas se signifier lui-même.

Mais si B est un énoncé, il fait aussi partie de l'univers de discours, à ce moment-là, B est donc dans A, et ce qu'on va dire, c'est qu'à ce moment-là on obtient une inconséquence, une contradiction. Et cela n'apparaît que si on le dit, que si on dit B. Ce que Lacan en retire, c'est que cela représente une sorte de stérilité, finalement, de dire que le signifiant ne peut se signifier lui-même.

- E. L. : Le signifiant ne peut pas se signifier lui-même, c'est qu'il n'est pas dans A ; mais pourtant on le dit, c'est un signifiant. La solution de Lacan, c'est d'inscrire S_1 dehors.



- C. E. : Le deuxième point, c'est de l'écrire, donc, en dehors. C'est ce qu'il propose pour éviter la contradiction, il faut l'écrire, mais il ne faut pas le dire. Cette fonction est très importante. Si on le dit, on a l'inconsistance, si on l'écrit, on a l'incomplétude.

- E. L. : C'est très important, il faut comprendre qu'il s'agit là de la fonction de l'écriture : en effet, il faut l'écrire, mais on ne peut pas le dire; ce qui fait qu'on ne peut pas dire le dernier mot.

- C. E. : C'est là que Lacan associe à cette fonction du B qu'on écrit en dehors, la lettre en tant qu'elle manque, la lettre volée si vous voulez; cette lettre qui supporte la thèse du $S(\not{A})$.

- E. L. : Vous dites : c'est la solution que Lacan trouve. C'est un des commentaires que Lacan fait du paradoxe, il y en a beaucoup d'autres qui à chaque fois précisent, font comprendre quelque chose, font miroiter une facette; ici, ce sont ceux de la logique du fantasme.

- C. E. : C'est cela, c'est dans la séance du 23 novembre 1966.

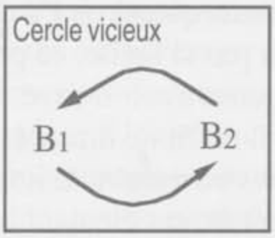
- E. L. : Grâce à cette opération d'écriture, vous avez l'incomplétude, mais pas l'inconsistance, puisque vous ne dites pas, vous écrivez $S(\not{A})$. Quand Lacan écrivait A, quand il mettait tous les énoncés dans A, il disait — relisez la "Question préliminaire à tout traitement de la psychose"— : il faut qu'au lieu de l'Autre il y ait un signifiant qui garantisse l'Autre, et c'est le Nom du père. Le Nom du père est ce qui dans l'Autre est particulier, car il assure et il garantit l'Autre ; il est dedans, c'est un signifiant. Cela avait fait grand problème parmi ses élèves : est-ce que le Nom du père c'est un nom, est-ce que c'est une chose, est-ce que c'est le nom de papa, etc. — il y avait toutes ces questions qui allaient de la naïveté la plus grande à la sophistication exacerbée. Cette question de la garantie ne porte en fait pas sur un énoncé à l'intérieur, mais sur un énoncé à l'extérieur qui ne peut pas se dire et qui peut être inscrit.

C'est ce qui apparaissait déjà avant que les hommes, avant que nous-mêmes puissions disposer d'une logique. Il n'y avait que l'interdit religieux : la seule façon de faire valoir que la garantie de discours est tenue par un Dieu calculateur, c'est de dire : on ne prononce pas le nom de Dieu, ce n'est pas un signifiant qui peut entrer dans la série — avec les phénomènes très compliqués que cela donne à ce moment-là, puisque Dieu est dans les textes néanmoins : comment est-ce qu'il peut être dedans et dehors, quel est le vrai nom de Dieu, etc. Il y avait donc un nombre de gens considérable qui pouvaient travailler sur la question, ça a fait travailler les intellectuels, ça donnait du travail à tout le monde, et ça a surtout déluré beaucoup les esprits, ce type de questions. Dans la religion juive ça a donné la Kabbale, chez les Catholiques ça a fait beaucoup de questions, également centrées sur l'autre chose compliquée qu'ils ont introduite, la Trinité : comment peut-on dire la commune substance alors que le nom, ce sont des noms de personnes ? Il y a Dieu, il y a le Fils, et le saint Esprit et ils ont une commune substance, mais cette commune substance ne peut être dite autrement que si on dit les noms. Ça a beaucoup stimulé les esprits.

Et nous reprenons cela à partir de $S(\not{A})$. On simplifie beaucoup de problèmes quand on écrit $S(\not{A})$, mais c'est cela qui est toujours difficile, il ne faut jamais oublier les problèmes qu'on simplifie quand on les écrit, parce que sinon il ne reste que la langue de bois.

Poincaré : les frontières indécises

- C. E. : Je reviens à l'ensemble B que j'avais inscrit tout à l'heure. Le problème, c'est que dans sa définition, il faut tenir compte de B lui-même, donc il y a un cercle vicieux ; c'est cela que Russell a appelé l'imprédicatif. L'imprédicatif a reçu plusieurs définitions ; une des définitions, c'est de dire que par exemple la définition d'un ensemble B_1 et d'un ensemble B_2 est imprédicative si la définition de B_1 fait appel à B_2 et la définition de B_2 fait appel à B_1. Dans ce cas-là, c'est B lui-même qui est des deux côtés, qui fait appel à sa propre définition — on a un cercle vicieux.



Il y a donc cercle vicieux quand la définition d'un ensemble fait appel à l'ensemble lui-même, même par le détour d'un autre ensemble. Dans notre cas, il faut ici se poser la question de savoir si l'ensemble s'appartient lui-même ou pas, et donc finalement il faut tenir compte de lui comme ensemble pour le définir. Donc il y a une imprédicativité, il faudrait déjà avoir l'ensemble pour pouvoir le construire.

Il s'avère que c'est très important, et qu'il y a une personne qui a questionné cela d'une manière particulièrement aiguë, c'est Poincaré, qui a eu des discussions fécondes sur ce sujet avec Russell, et il a énoncé ce qu'il appelle le principe du cercle vicieux, à savoir : il faut éviter les définitions imprédicatives. Une autre manière de spécifier une définition imprédicative, c'est de dire que si dans la définition de l'ensemble il y a une variable liée (c'est-à-dire une variable qui indique une place) dont l'ensemble lui-même peut venir à occuper la place, cette définition est imprédicative.

Prenons par exemple ce paradoxe lié à l'imprédicativité que Lacan évoque dans la même leçon :

- Soit E l'ensemble des mots que l'on peut définir en moins de cent mots.
- Soit n le plus petit nombre qui n'appartient pas à E.
- On vient de définir n en moins de cent mots, donc il appartient à E.

Ainsi, la prise en compte de n est contradictoire.

- E. L. : Puisque vous n'avez pas défini une différence de niveau de définition entre le tout et les éléments, vous avez un phénomène imprédicatif, c'est-à-dire que le prédicat ne fonctionne pas comme un bon prédicat doit fonctionner, il ne distingue pas bien les deux niveaux, il ne distingue pas bien l'ensemble et l'élément, Dieu et sa créature, tout est vu du même point, et vous obtenez à ce moment-là ce type de paradoxe. Tout le monde a saisi ? C'est très clair.

- C. E. : Finalement, donc, cet élément n est insituable : est-ce qu'il est dans E, est-ce qu'il n'y est pas ? C'est pourquoi Poincaré dit : quelque chose qui est imprédicatif, c'est quelque chose dont la frontière est indécise. Je me suis appuyé là sur une des leçons du cours de Jacques-Alain Miller dans « Extimité », au cours de laquelle celui-ci nous propose une reconstruction des formules de la sexuation à partir de l'imprédicativité de $x \notin x$. Vous pourrez vous y référer, cela couvre les trois leçons du 7, 14 et 21 mai 1986.

- X : Le nombre de moins de cent mots, quand on ne l'a pas défini, on ne sait pas, mais quand on l'a défini, il est là, il est situable.

- C. E. : Ce n'est pas si facile, ce point-là, de savoir si on l'a bien défini. Poincaré pense avoir trouvé, il dit : la solution du problème est très simple, il suffit de dire « [...] qu'on peut définir par moins de cent mots *sans introduire la notion de l'ensemble lui-même* », et à ce moment-là, cet élément serait exclu, parce que pour le définir j'ai utilisé la définition de l'ensemble lui-même.

Mais en fait, dans son livre *Entre intuition et analyse, Poincaré et le concept de prédicativité* [3], Heinzmann rappelle l'argument que Russell avait opposé à cette solution : finalement ce n'est pas très satisfaisant, parce qu'à ce moment-là, si on dit « qu'on peut définir par moins de cent mots sans introduire la notion de l'ensemble E lui-même », c'est à nouveau imprédicatif.

- E. L. : Reprenez l'argument de Poincaré qui était de dire : on peut s'en sortir si l'on n'introduit pas la notion de l'ensemble E lui-même.

- C. E. : Donc, au lieu de « l'ensemble des nombres qu'on peut définir en moins de cent mots » je vais dire : « l'ensemble des nombres qu'on peut définir en moins de cent mots *sans introduire la notion de l'ensemble lui-même* ».

- E. L. : Donc en ne se posant pas la question de savoir si l'élément appartient à l'ensemble, il le maintient comme une sorte d'ouvert, ce n'est pas une totalité. Il dit simplement : si vous n'avez pas défini de frontière, si vous ne définissez pas l'ensemble comme un tout, à ce moment-là, si jamais il y a un nombre qui n'y appartient pas mais qui y appartient quand même pour une raison ou une autre, eh bien on le met dedans. Puisque vous n'avez pas défini les frontières préalablement à l'existence, on admet que l'extension de la classe accueille des éléments un peu tératologiques. Il y a des éléments monstrueux, mais comme on n'a pas défini la frontière de la classe, on peut leur faire une place ; et après on trouve des façons de garrotter l'aspect monstrueux de la chose, que ça ne contamine pas tout ; on se débrouille.

- X : Le problème, c'est que c'est contagieux, c'est-à-dire qu'une fois qu'on a introduit cet élément dans la classe, il y en a à nouveau un qui est le plus petit nombre qui ne lui appartient pas.

- E. L. : En effet. Mais l'important c'est que Poincaré considère qu'il ne faut pas avoir introduit la frontière de l'ensemble. En effet, dans le livre d'Heinzmann, il dialogue avec Russell — ce dialogue est très beau, d'ailleurs. Poincaré commence par dire : l'important c'est qu'il ne faut pas avoir défini le tout, il ne faut pas avoir précisé la frontière ; Russell discute avec lui, et ils en arrivent à cette idée que

3 *G. Heinzmann,* Entre intuition et analyse : Poincaré et le concept de prédicativité, *A. Blanchard, Paris, 1985. Voir aussi le recueil de textes présenté par le même G. Heinzmann :* Poincaré, Russell, Zermelo et Peano : textes de la discussion sur les fondements des mathématiques : des antinomies à la prédicativité, *A. Blanchard, Paris, 1986.*

c'est surtout une question de niveau, que ce n'est pas une question de frontières, et donc qu'on peut parfaitement définir la notion d'ensemble.

C'est Cantor qui a introduit ce mode particulier du tout ; c'est par lui que s'est introduite la notion d'ensemble. Au fond les multiplicités cantoriennes détruisent les hiérarchies du tout et du un, puisque vous pouvez mettre dans une classe à la fois l'élément et la classe elle-même. L'ensemble est un instrument de déconstruction du tout, c'est un nouveau mode du tout dont on ne cesse pas d'apercevoir la fécondité, la complexité, etc.

Donc Poincaré disait : on laisse de côté l'ensemble ; on se fonde sur la classe, et on essaie de jouer avec ça ; mais Russell répond : pas du tout, on peut sauvegarder ensemble et classe à condition de bien différencier les niveaux.

L'abandon de la complétude

- C. E. : En tout cas c'est là que le point de vue de Poincaré rejoint le point de vue intuitionniste dont j'avais parlé la dernière fois, c'est que selon lui une définition doit être aussi un procédé de construction des éléments de l'ensemble ; ce qui définit un ensemble, c'est un procédé de construction de ses éléments, il faut donc éviter, par cette construction, les cercles vicieux, l'imprédicativité.

- E. L. : Pas d'élément qui tout de suite mette en jeu le tout ; donc vous ne pouvez pas progresser, c'est là où en effet intuitionnisme et Poincaré se rejoignent — c'est un des points forts de votre exposé de bien faire valoir cela, et il faudra qu'on trouve d'ailleurs une façon de le faire connaître —, il ne faut pas que le tout soit donné à l'avance, il faut construire d'abord élément par élément et ne pas avoir de discours sur le tout avant que vous n'ayez l'ensemble constitué construit un par un ; donc pas de proposition sur l'ensemble avant que vous n'ayez de tout constitué. Et une fois que vous avez le tout constitué, plus question d'avoir d'élément tératologique. Vous les avez tous bien examinés, vous les avez tous construits un par un, et donc vous les avez tous là ; et quand vous vous mettez à la frontière, vous êtes sûr qu'ils sont tous là et qu'ils sont tous sains et bien portants, qu'il n'y en a pas un là dedans qui porte le virus. On rejoint là l'idée intuitionniste de la vérification point par point, et de ne pas admettre de règle sur le tout. On n'admet pas ces ensembles infinis qui réservent des tromperies.

- C. E. : Poincaré a attaqué, comme beaucoup de mathématiciens de l'époque, la notion d'infini actuel qui s'est trouvée à nouveau promue par Cantor — une notion dont l'origine remonte, je crois, à Proclus, et ayant trait à cette question religieuse.

Concernant ce tout des entiers, Poincaré aussi a débattu de façon serrée avec Russell au sujet du principe d'induction — qu'il a été jusqu'à qualifier celui-ci de jugement synthétique a priori. Vous savez que ce principe est l'un des pivots du raisonnement mathématique. Pour montrer qu'une propriété est satisfaite par tous les entiers, c'est ce type de raisonnement par récurrence ou par induction qu'on utilise. Je vais vous donner un petit exemple :

On a :
$1=1^2$
$1+3=4=2^2$
$1+3+5=9=3^2$
$1+3+5+7=16=4^2$

Ici on pourra s'attendre à ce que la somme des n premiers nombres impairs donne toujours n^2. C'est ce dont le principe de récurrence permet de s'assurer. Ce principe dit qu'on aura pour tout n, $f(n)$, si on arrive à donner $f(0)$, et que pour tout n, $f(n)$ implique $f(n+1)$:
$\forall n\ f(n)$, $f(0)$ et $\forall n\ f(n) \Rightarrow f(n+1)$.

Poincaré s'est rendu compte qu'il n'était pas si évident d'identifier les nombres entiers aux nombres qui vérifient le principe de récurrence pour toute formule f, qu'il y avait là quelque chose qui n'allait pas de soi. Je passe un peu sur cette affaire; mais elle touche à l'arithmétique de Peano, puisque dans celle-ci on est obligé d'ajouter ce principe comme axiome, en disant que c'est valable pour toute formule f.

Il y a un mathématicien, Nelson, plus récemment, qui s'est dit : cela ne va pas, parce qu'en fait, le $\forall n$, ça veut dire pour tout nombre n qui satisfait le principe de récurrence pour toute formule. Donc quand on veut définir ce que veut dire $\forall n\ f(n)$, cela veut dire pour tout entier qui satisfait le principe de récurrence y compris pour la formule f en question, ce qui fait que l'on tombe sur un cercle vicieux.

Peano avait axiomatisé cet infini actuel et présupposé des entiers. Mais si on veut ainsi définir l'ensemble des entiers, alors apparaît le problème que cette axiomatique représente une définition imprédicative de cet ensemble; et cela, c'était resté assez caché et peu questionné malgré les critiques de Poincaré. Donc ce mathématicien dit : on va reconstruire toute l'arithmétique, mais en restant prédicatif. Je passe sur les détails parce que c'est assez compliqué, toutes ces démonstrations sont très techniques, évidemment, mais il obtient quelque chose d'assez étonnant, c'est qu'en reproduisant la technique de Gödel pour coder les démonstrations, cette fois on peut prouver, avec les seuls moyens de cette nouvelle arithmétique, sa propre consistance.

Le problème, c'est que ce tout-là, il faut le construire, étape par étape ; le malheur, c'est qu'on n'obtient pas tous les entiers qu'on pourrait imaginer.

- **E. L.** : Ce sont des travaux récents ?
- **C. E.** : Très récents.
- **E. L.** : Vous voyez l'intérêt. C'est bien de savoir ça, parce que quand on répète toujours "le théorème de Gödel" c'est très bien, mais il faut savoir que ça n'empêche personne de penser, et qu'au contraire,

même, ça fait penser tout le monde, donc il y a un certain nombre de personnes qui essayent de trouver ce que ça veut dire exactement, on ne sait pas. Je vous ai signalé le petit livre qui est paru, qui publiait aux éditions du Seuil le texte de Gödel avec des commentaires d'un logicien, Jean-Yves Girard[4], et ici vous faites appel à d'autres travaux encore, intéressants, en effet, ceux de Nelson, qui montrent que si vous ne vous donnez pas un tout mais que vous avez un ensemble construit par récurrence, comme l'arithmétique, et qu'à chaque étape, vous appliquez, vous cherchez la règle — donc vous n'avez pas le tout, vous construisez un ensemble qui est l'arithmétique, mais sans jamais vous donner l'ensemble des nombres entiers, et pourtant à chaque moment c'est l'arithmétique —, eh bien avec ça, vous jugulez l'histoire Gödel ; c'est en effet assez sioux, son affaire. Ce que vous nous faites apercevoir suffit pour discerner que la référence à Gödel, c'est surtout une question de maîtrise du tout, des touts qu'on se donne.

- C. E. : Il n'y a pas que Nelson, il y a une autre tentative qui est évoquée, d'ailleurs, dans le livre de Heinzmann, c'est celle de Feferman. En fait, ils ont eu la même idée tous les deux, c'est de développer des mathématiques prédicatives, tous les deux s'y réfèrent.

- E. L. : Il faudra tirer des conséquences des travaux de Nelson et Feferman pour notre système peanien à nous, celui des signifiants. C'est en effet très intéressant.

- C. E. : Tous les deux, d'ailleurs, pensent qu'effectivement, peut se développer maintenant un programme de Hilbert revisité, modifié, où cette fois-ci on développe progressivement des mathématiques dont on peut assurer la consistance.

- E. L. : Jean-Yves Girard n'y fait pas référence ; un des intérêts de votre exposé, c'est d'y faire référence directement, mais lui, à la fin de sa présentation du théorème de Gödel, fait allusion au fait que de nos jours, au fond, le programme hilbertien a gagné, et que simplement, dit-il, Gödel a sauvé les mathématiques parce qu'il a permis de sauver l'activité mathématique : on ne pouvait pas tout programmer. Il a sauvé le fait qu'il fallait quand même des mathématiciens. Parce que sinon, il n'y a plus besoin de mathématiciens; si vous avez un algorithme qui travaille, si on peut engendrer toutes les mathématiques possibles à l'aide de formules, etc., il suffit d'avoir un gros ordinateur et puis de lui faire calculer tout ce qu'il est possible de calculer ; si tout se déduit, il n'y a plus besoin de mathématiciens qui vont trouver des objets mathématiques. Donc l'activité du mathématicien disparaît si vraiment tout est algorithmisable — enfin, c'est une façon de prendre le problème. Par contre, ce que Nelson et Feferman montrent, c'est qu'on peut avoir un programme de Hilbert, qui pourtant sauvegarde parfaitement l'activité des mathématiciens.

- C. E. : C'est ce que j'ai essayé de montrer : qu'il y a deux volets, justement, dans le programme de Hilbert. La complétude, c'est ce qu'il faut abandonner si on veut avoir la consistance.

4 *K. Gödel, E. Nagel, J. R. Newman, J. Y. Girard,* Le théorème de Gödel, *Seuil, Paris, 1989.*

- E. L. : Il faut abandonner la complétude.

- C. E. : Pour vous amuser, je peux vous lire un peu ce que dit Nelson. Il dit qu'en fait, les mathématiciens croient pour la plupart d'entre eux à l'infini actuel des nombres. Voici donc un passage de son livre *Predicative Arithmetic* [5] :

> "Quelle est l'origine de cette croyance ? Le dit fameux de Kronecker que Dieu créa les nombres et que tout le reste est l'œuvre de l'homme n'était très probablement pas à prendre au sérieux. Nulle part dans le livre de la Genèse, nous ne trouvons le passage : "Et Dieu dit : que les nombres soient et ils furent, pairs et impairs il les créa, et il dit croissez et multipliez, et il leur commanda de respecter les lois de l'induction". Non. La croyance en ω [l'ensemble des nombres entiers] vient des spéculations de la philosophie grecque sur l'existence d'entités idéelles ou des spéculations de la philosophie allemande sur les catégories *a priori* de la pensée. Un recours à ω pour justifier le principe d'induction n'est pas plus sûr que ne le sont ces systèmes philosophiques, et cependant il est difficile de l'abandonner. Nous sommes des créatures, Kronecker le gardait en vue, pas tant que cela plus âgés qu'un enfant dans une crèche et nous ressentons encore le besoin urgent de compter sur quelque chose lorsque nous comptons. L'enfant compte sur ses doigts, le mathématicien compte sur ω, mais l'enfant sait au moins que ses doigts existent. L'attitude des mathématiciens envers ω a été en pratique une attitude de foi, et de foi en une hypothétique entité de notre propre invention, à laquelle sont assignés les attributs de nécessaire existence et d'infinie grandeur, qui est l'idolâtrie."

Cela pour vous donner une idée de la tonalité des commentaires de Nelson.

Évanescence de l'Oedipe

- E. L. : Je vous remercie de nous faire déboucher sur ce qui est le thème du cours de l'année : la faute dans ses rapports avec la nécessaire grandeur et l'idolâtrie. Qu'est-ce qui nous énonce notre faute, d'où est-ce que s'énonce la faute ? Et en effet, l'enfant compte. Mais est-ce qu'il compte sur ses doigts, ou est-ce qu'il compte sur sa faute ? L'idée freudienne, c'est qu'au fond, l'enfant compte jusqu'à quatre, il compte son père, sa mère, le sujet et le phallus, il compte l'Oedipe et la castration, il compte jusqu'à quatre beaucoup plus que sur ses doigts. C'est la faute oedipienne qui fait compter. Lacan pose la question : comment le nombre s'est-il introduit dans le monde ? Il s'introduit dans le langage, sûrement ; mais comment ? En effet, c'est absolument décisif que dans la Genèse, il n'y a pas "il les nomma un et deux". La création de l'arithmétique n'est pas dans la Genèse. Or ce qui est absolument décisif, c'est : comment l'arithmétique s'est-elle introduite dans le monde ? Et en effet, quand Nelson dit que pour le point de vue du mathématicien, les nombres sont là, ça peut donner en effet des sensations platoniciennes — d'où viennent-ils ? C'est très intéressant de voir que les travaux des mathématiciens qui osent travailler sur ce type de questions — parce qu'après tout il faut quand même oser s'y affronter — maintiennent vivante la question de ce à

5 *E. Nelson,* Predicative Arithmetic, *Princeton University Press, 1987.*

quoi nous croyons. La question de la croyance, de la faute, de l'un, sont nouées à jamais, et il ne faut pas croire que nous modernes, soyons plus malins que les anciens et que nous sommes libérés de ces questions. Nous y sommes affrontés, et dans la psychanalyse justement, avec la question de ce sur quoi nous comptons, avec quoi nous comptons, et le fameux tétrapode de Lacan, qui est quand même la façon dont s'introduit le quatre.

On voit que Lacan lui-même le remet en question, comme le rappelle Jacques-Alain Miller, que ce n'est pas seulement la relation du un et du deux qui est mise en jeu, mais l'inaccessible, la jouissance dont finalement Lacan parle dans son œuvre. Lui ne pense pas ω et l'ensemble, il parle d'abord du fait qu'on a S_1 et S_2 et qu'on a leur relation, que cela va faire le lieu de l'Autre, que cela fait un tout ; il déconstruit ce tout suffisamment avec la question de la pulsion, il le déconstruit ensuite suffisamment pour à la fin définir les rapports de l'un tout seul et de son Autre, qui devient la jouissance inaccessible. Il y a à partir de "L'Étourdit" une définition en effet des rapports de la jouissance inaccessible qui vient mettre en place un « deux » qui va permettre ensuite de passer à quatre, et d'expliquer sur quoi l'enfant va compter, comment il va compter sur le *Fort-Da*, comment avec le *Fort-Da* il va isoler maman, le phallus, lui et papa, et cela va faire un certain nombre.

L'Autre, c'est la garantie de l'Autre, avec un monde dans lequel on aura de plus en plus les rapports de l'enfant et de maman. Il n'est pas sûr qu'il y aura papa, ou ce ne sera plus le même papa une fois que nous aurons eu un certain nombre de traficotages qui rendent la question oedipienne de plus en plus évanescente dans nos sociétés — enfin, il y aura des styles de vie, il y aura les gens qui auront des familles oedipiennes et puis les autres, ce sera simplement des styles de vie. On approche vraiment de l'exténuation de la question pour toute une frange importante des hommes et des femmes de la planète. Eh bien à partir de là, néanmoins, Lacan explique comment la jouissance et l'Autre maintiendront ouvertes la question de la garantie et celle de la castration — comment elle, par contre, il n'y aura pas moyen de s'en passer, cela restera à l'ordre du jour.

Bon, je vous remercie, j'ai été content que vous nous introduisiez à cela, et j'espère pouvoir reprendre l'an prochain sur ces questions, sur les questions de l'éthique de la psychanalyse et les conséquences contemporaines que l'on peut en tirer à l'époque que l'on peut appeler "le temps des morales" ; comment les questions ouvertes par l'analyse restent virulentes, avec des conséquences absolument décisives sur la bonne constitution des ensembles qui nous régissent ; et que veut dire obéir aux règles, aux lois, etc.

Voilà, je vous remercie. ■