Entre lier et séparer ?

Du go aux entrelacs, et autres fibrations...

Stéphane Dugowson

23 octobre 2008

Ce texte condense et actualise mon intervention au colloque « Lacan, le savoir, les savoirs », qui s'est tenu le 20 mars 2007 à l'Université Paris 8[1]. Je remercie Gilles Chatenay et Nathalie Charraud de m'avoir invité à ce dialogue entre mathématiques et psychanalyse[2], et les organisateurs du colloque, en particulier Gérard Miller et Fabienne Hulak, qui édite également cette revue.

Spontanément, sur le chemin de la connexité, divers objets mathématiques surgissent, déroutants, qui expriment autant d'aspects dialectiques du lien et de la séparation, de nature à inspirer des développements en dehors des mathématiques ou de la science proprement dites. Partant du jeu de go, nous renconterons successivement des graphes de synonymes, le nœud borroméen, l'attracteur borroméen représenté sur la couverture de ce numéro de la *Lettre mensuelle de la Cause Freudienne* et enfin la fibration de Hopf.

Du jeu de go aux espaces connectifs

C'est au cours d'une partie de go que j'ai eu la première idée de ces recherches. En un sens assez général et un peu vague, on peut qualifier le jeu de go de topologique, comme en témoignent les notions fondamentales que sont, au go, les frontières et la connexité : connecter ses propres pierres, séparer celles de l'adversaire sont des opérations qui, pour le mathématicien, présentent une saveur topologique prononcée.

Pourtant, d'un point de vue formel, le jeu de go n'entre pas vraiment dans le cadre de la topologie proprement dite, mais se décrit plutôt en termes de graphes — plus précisément de graphes simples non orientés — c'est-à-dire d'ensembles de sommets entre lesquels existe une possibilité de connection. La connection entre deux sommets d'un graphe est certes généralement

[1] Voir aussi ma conférence à l'ENS du 13 octobre 2005.

[2] Dialogue qui s'est notamment poursuivit dans *La Cause freudienne*, en mars 2007.

représentée par une courbe ou un segment de droite reliant ces sommets, mais bien souvent il ne s'agit là, justement, que de représentations sans véritable réalité topologique. Considérons par exemple le graphe dont les sommets sont les termes du lexique français et tel que deux sommets sont connectés si les termes correspondants sont synonymes, c'est-à-dire qu'il existe au moins un contexte où une même signification puisse être attachée à ces deux termes : on peut toujours représenter cette relation de synonymie en traçant une courbe entre les deux sommets en question, mais qu'en serait-il alors de l'infinité continue des points constituant une telle courbe et de l'espace ambiant dans lequel on prétendrait plonger ainsi les sommets de ce graphe linguistique ? Aussi, malgré leurs relations parfois étroites, doit-on considérer comme relevant de deux théories distinctes les notions relatives aux graphes d'une part, à la topologie d'autre part.

Or, la notion de connexité — le fait d'être d'un seul tenant — se trouve recevoir une définition totalement différente selon que l'on se situe dans le cadre des graphes ou dans celui des espaces topologiques proprement dits[3]. Aussi le traitement mathématique de la notion de connexité se trouve-t-il scindé — un comble — en au moins deux morceaux : un relatif aux graphes, un autre à la topologie. D'où l'idée d'une catégorie d'espaces permettant d'unifier ce traitement : les espaces connectifs. La définition de tels espaces consiste à spécifier sur un ensemble de points celles des parties qui seront considérées comme connexes, le choix de ces parties pouvant se faire librement pour autant que l'axiome suivant soit satisfait : l'union de parties connexes ayant un (ou plusieurs) point(s) en commun doit elle-même être connexe. Il y a en fait une autre condition, que l'on pourrait considérer comme optionnelle mais qui mathématiquement simplifie beaucoup de choses — les psychanalystes sont bien placés pour l'envisager — c'est de supposer que chaque point, considéré individuellement, constitue lui-même une partie connexe, d'un seul tenant.

Avec cette définition, les espaces topologiques et les graphes (simples non orientés) définissent des espaces connectifs particuliers. L'aventure commence avec les nouveaux espaces connectifs, ceux qui ne sont associés ni à un espace topologique, ni à un graphe. Le plus simple de ces espaces connectifs originaux comporte exactement trois points qui, ensemble, sont connectés, mais sans l'être deux à deux. Par analogie évidente avec l'entrelacs du même nom, nous l'appellerons l'*espace borroméen.*

[3]Du reste, si la plupart des espaces topologiques ne peuvent être identifiés à des graphes, les parties connexes d'un graphes ne peuvent pas non plus, en général, être obtenues en munissant l'ensemble des sommets du graphe d'une structure topologique.

Des treillis de structures

Comme le souligne Nathalie Charraud dans son ouvrage sur *Lacan et les mathématiques*, l'ensemble des structures topologiques dont un ensemble donné de points peut être muni s'organise selon un ordre partiel appelé *treillis*, borné par deux structures extrémales : la topologie *discrète*, où rien n'est lié à rien, et la topologie *grossière* (dite aussi *indiscrète*) où tout fusionne. Cette organisation en treillis caractérise également l'ensemble des graphes construits sur un ensemble donné de sommets. Ainsi, la structure du graphe des synonymes évoqué précédemment peut-elle être située quelque part entre les deux extrêmes que constitueraient d'une part un lexique où aucun terme ne serait jamais synonyme d'aucun autre, d'autre part celui où tous les termes seraient synonymes entre eux. C'est là, dans cette position intermédiaire, que des choses vraiment intéressantes peuvent se produire. Ainsi, on peut remarquer que l'ensemble des adjectifs est, à quelques exceptions près, connexe, c'est-à-dire qu'entre deux adjectifs quelconques, il est presque toujours possible de trouver une chaîne de synonymes intermédiaires, comme l'illustrent les chaînes de synonymes suivantes :

- *Conscient, délibéré, libre, spontané, inconscient,*
- *Coupable, mauvais, nul, ignorant, candide, innocent,*
- *Net, précis, adroit, fin, léger, flou,*
- *Vrai, évident, apparent, faux.*

La même remarque vaut par exemple pour les verbes, et entre *lier* et *séparer* on pourra notamment trouver l'expression *mettre entre*. Bien entendu, cela ne signifie pas que tous ces termes soient synonymes deux à deux : conscient n'est pas inconscient, coupable n'est pas innocent, net n'est pas flou, et ce n'est certes pas la même chose qu'être vrai ou faux, quoi qu'en disent les sophistes, ou les égarés. Ainsi, les structures intermédiaires entre discrétion absolue et grossièreté totale réalisent-elles un équilibre utile, et souvent subtil, entre liaison et séparation. Or, cette dernière remarque vaut également pour les espaces connectifs, leurs structures s'organisant elles aussi en treillis. Ainsi, l'espace borroméen représente-il l'exemple le plus simple de structure proprement connective où se manifeste effectivement une dialectique intéressante du lien et de la séparation.

Connectivité et entrelacements

L'analogie qui m'a conduit à baptiser *espace borroméen* l'espace connectif à trois points décrit plus haut peut être rendue rigoureuse à travers la notion de représentation par un entrelacs d'un espace connectif, l'espace connectif borroméen pouvant précisément être représenté par l'entrelacs connu sous le nom de *nœud borroméen*. La question se pose alors assez naturellement de savoir si toute structure connective finie peut ou non être représentée par un entrelacs. Je dois à Gilles Chatenay, qui m'a fait parvenir à la fin de l'été 2007 une copie de la traduction française, publiée en 1982 dans *Ornicar ?*, d'un article de 1892 du mathématicien allemand Hermann Brunn, d'avoir réalisé que ce dernier s'était non seulement posé la même question mais qu'il avait donné les éléments essentiels permettant d'y répondre positivement. Après des travaux du Suisse Hans Debrunner dans les années 1960 sur des entrelacs de variétés en dimensions supérieures, une démonstration rigoureuse de la proposition de Brunn sera finalement donnée par le mathématicien japonais Taizo Kanenobu, dans deux articles peu connus, datant de 1984 et 1986.

Des frontières métaphysiques ?

Dès que l'on dispose d'une catégorie, se pose la question d'étudier les flèches qui opèrent entre ses divers objets. Dans le cas des espaces connectifs, on s'intéressera par exemple aux fonctions connectives, à valeurs borroméennes, définies sur un espace topologique classique tel que la droite ou le plan euclidien. A une légère modification près de la structure du plan, on obtient parmi les plus simples de ces flèches la fonction représentée sur la couverture de ce numéro. Il s'agit des bassins d'attraction pour les racines cubiques de l'unité obtenus par une méthode de Newton appliquée dans le plan complexe. La frontière fractale commune aux trois valeurs borroméennes représente en quelque sorte une quatrième valeur, liée au point à l'infini compactifiant le plan complexe et que l'on pourrait rapprocher du *sinthome* lacanien. A travers une telle frontière de dimension non entière, la circulation des flux pourrait mettre en jeu ce que Leibniz appelait les *différentielles métaphysiques*, c'est du moins l'une de mes hypothèses de recherche actuelles.

La fibration de Hopf, entre finesse et indiscrétion

Le théorème de Brunn, Debrunner et Kanenobu concerne les espaces connectifs finis. La superbe présentation de la *fibration de Hopf* du tore donnée, entre autres merveilles, par Jos Leys, Étienne Ghys et Aurélien Alvarez dans leur film *Dimensions* permet de réaliser que cette fibration constitue sans doute la représentation par entrelacs la plus « naturelle », sinon la plus « simple », d'un espace connectif infini totalement connecté, les cercles qui la constitue, en nombre infini, étant deux à deux attachés. Une grande finesse se révèle ainsi déjà nécessaire à la représentation par entrelacs de la moins fine des structures connectives infinies.

Références

« Qu'est-ce que tenir ensemble ? », entretien avec Nathalie Charraud et Gilles Chatenay, in : *Notre sujet supposé savoir*, La Cause freudienne n° 68, mars 2008, Paris.

Stéphane Dugowson, *Les catégories et le passage des frontières*, Colloque "Impact des catégories", 13 octobre 2005, Ecole Normale Supérieure (Paris). Vidéo disponible sur `http ://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=894`.

Nathalie Charraud, *Lacan et les mathématiques*, Anthropos, 1997.

Hermann Brunn, « Ueber Verkettung »(1892), trad. française par C. Léger et M. Turnheim : « De l'enchaînement », *Ornicar ?*, n°25, 1982.

Dimensions, film mathématique tout public de Jos Leys, Étienne Ghys et Aurélien Alvarez, en libre accès sur `http ://www.dimensions-math.org`